

## 《資料》

## 等区分グラフ分析法とその応用

— マハラノビスによるローレンツ曲線の多重化 —

木 村 和 範

はじめに

1. マハラノビスの標本調査
  - (1) 標本調査と正確さ
  - (2) 相互貫通標本網
2. 標本統計とそのグラフ表示
  - (1) 相互貫通標本調査と等区分グラフ分析法
  - (2) 2変量ローレンツ曲線

むすび

付表

## はじめに

マックス・O. ローレンツが1905年論文「富の集中にかんする計測方法」<sup>(1)</sup>で示した曲線は、ウィルフォード・I. キングによって「ローレンツ曲線」と命名された<sup>(2)</sup>。この曲線は、所得分布を視覚に訴えて明証的に示すために活用された。その後、所得分布にかんする研究分野ではジニ係数が所得格差の統計的計測指標として使用されるようになった。この結果、ローレンツ曲線はジニ係数の数理的意味を図解するときに用いられるに留まることが多くなった。

ところが、ローレンツ曲線の考え方は、所得分布の分野だけでなく、さまざまな分野で応用されている（本稿末尾補注参照）。本稿で取り上げるマハラノビスの試み（標本調査によって得られた統計〔大屋裕雪のいわゆる「標本統計」〕の利用）にも、ローレンツの構想が生かされている。一般にローレンツ曲線が単一の経済量（たとえば所得）のグラフ表示を目的としているのにたいして、P. C. マハラノビスは、2変量（消費支出総額と穀類支出額）にかんするローレンツ曲線を1枚のグラフに表示しようと試みた。この多重化の試みは、彼の業績の1つに数えられている<sup>(3)</sup>。「等区分グラフ分析法 (fractile graphical analysis)」の延長線上に位置づけることができる。本稿では、この等区分グラフ分析法を取り上げて、マハラノビスによるローレンツ曲線拡充の試みを紹介する。

## 1. マハラノビスの標本調査

## (1) 標本調査と正確さ

インド統計協会 (Indian Statistical Institute) のホームページ (<http://www.isid.ac.in/>) には、マハラノビスの略歴と業績が掲

(1) Lorenz, Max O., "Methods of Measuring the Concentration of Wealth," *Publications of the American Statistical Association*, no.70, 1905.

(2) King, Willford Isbell, *The Elements of Statistical Method*, New York 1912, pp.156ff. cf. "Geschichte der ABC-Analyse," HP of ABC-Analyse.info [<http://www.abc-analyse/abc/geschichte.html>], accessed on Nov. 20, 2003.

(3) Rao, Callyampudi Radhakrishnan, "Mahalanobis, P. C.," *International Encyclopedia of Statistics*, Vol. 1, ed. by Kruskal and Tuner, New York and London 1968, p.574.

載されている<sup>(4)</sup>。それによれば、マハラノビスが初めて任意抽出標本調査をインドで実施したのは1937年であり、そのときの目的はベンガル州におけるジュートの作付面積と収穫量を調査することであった。マハラノビスはこの調査結果の正確さを問題視して、それを受容しがたいものと考えた。その後、インドでは標本調査の有効性をめぐって、統計学者を「センサス派」と「標本調査派」に分かつ標本調査論争が10年以上にも渡って行われた<sup>(5)</sup>。インド統計協会のホームページには、「最終的には、標本調査にもとづく推定値が全数調査によるよりもしばしば正確 (accuracy) であって、しかも標本調査が全数調査にくらべて、より低コストで短時間のうちに、狭い誤差の限界におさまるような推定値をあたえることを、彼 [マハラノビス] は証明できた。」との記事が見られる。そして、標本調査の分野における彼の功績の1つに「相互貫通標本網 (interpenetrating network of sample)」<sup>(6)</sup>を挙げている (この方法は、その頭文字をとってIPNSと呼ばれることも少なくない)。コ克蘭によれば、マハラノビスの考案したこの方法は、「とくに、測定誤差に相関があるときの研究にたいして有効

である」と言われている<sup>(7)</sup>。また、最近では、マハラノビスのIPNSは、「相互貫通標本法 (method of interpenetrating sample)」という名でも呼ばれ、構想当初の主要目的は非標本誤差のコントロールと減殺 (control and reduce) にあったことも指摘されている<sup>(8)</sup>。

後に、相互貫通標本網の内容を見るが、それに先だって、マハラノビスが標本調査を設計するときに留意した点を確認しておきたい。そのことによって、相互貫通標本網の方法論的な基礎が明らかになるからである。マハラノビスは次のように述べている<sup>(9)</sup>。

……統計的観点からのわれわれの狙いは、経費の総額が決まっている場合には、最終の推定値の正確さ (accuracy) が可能な限り高く、また推定精度があたえられているときには、総経費が可能な限り小さくなるように、標本調査技法の水準を高めることである……。

このためには、(a)標本単位の最適な大

(4) <http://www.isid.ac.in/~library/pcm.htm>, accessed on Dec. 2, 2003.

(5) ①Mahalanobis, Prasantha Chandra, "A Sample Survey of the Acreage under Jute in Bengal," *Sankhyā*, Vol. 4, 1940 (以下, Mahalanobis [1940] と略記); ②ditto, "Sample Surveys of Crop Yields in India," *Sankhyā*, Ser. A, Vol. 7, 1946; ③ditto, "On Large-scale Sample Surveys," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Ser. B, Vol. 231, 1946; ④ditto, "Recent Experiments in Statistical Sampling in the Indian Statistical Institute," *JRSS*, Vol. 109, 1946.

(6) "interpenetrating" は「相互貫入」とも訳されている (竹内啓編『統計学辞典』東洋経済新報社 1989年 p.264)。

(7) Cochran, William G., *Sampling Techniques*, 2<sup>nd</sup> edn., New York, London and Sydney, 1963. (鈴木達三・高橋宏一・脇本和昌訳『サンプリングの理論と方法(2)』東京図書 1972年 p. 205。)コ克蘭によれば(同上訳書, p.208), デミングはこの方法を多用した (Deming, W. E., *Sample Design in Business Research*, New York 1960 [齊藤金一郎・浅井豊・大沢豊訳『調査における標本設計』日科技連 1964年 とくに第II部])。

(8) Wright, Tommy, "Selected Moments in the Development of Probability Sampling: Theory & Practice," *Newsletter of Survey Research Method Section (The American Statistical Association)*, Issue 13, July 2001, p.4 (<http://amstat.org/sections/SRMS/news.sum01.pdf>, accessed on Dec. 2, 2003). cf. Koop, J. C., "The Technique of Replicated or Interpenetrating Samples," in Krishnaiah, P. R. and Rao, C. R. (eds.), *Handbook to Statistics: Sampling*, Vol. 6, New York 1988.

(9) Mahalanobis [1940], p.513.

きさ、(b)目標として措定された正確さを最終推定値が達成するうえで必要な標本単位の総数、(c)調査対象となった、相異なる、広狭さまざまな地域に標本単位を割り当てるための最良の方法、の3つを定める必要がある。

## (2) 相互貫通標本網

マハラノビスの相互貫通標本網は彼が自らに課したこの課題に応えるものとして構想された。この相互貫通標本網の目的と実施方法についてはマハラノビスによるものを始めとして数多くの解説がある。そのなかでも、ラオ<sup>(10)</sup>による説明が簡にして明であるから、それを以下に引用する。

……彼 [マハラノビス] はクロス・チェックを行って、調査結果を妥当なものにしようとした。そのために、彼は相互貫通標本網 (i.p.n.s.) の概念を展開した。

相互貫通標本網を用いるときの簡単な調査設計は次のようになる。ある地域が4つの層に分割され、現地調査に4人の調査員を派遣するものとしよう。通常やり方では、1つの層に1人の調査員を割り当てて、特定の層から(ランダムに)選出するべきすべての単位をカバーさせるようにする。ところが、相互貫通標本網による調査設計では、各々の調査員がすべての層で調査を行い、[通常やり方によるとき] 4分の1の単位をランダムにカバーすることになる。このようにすれば、相互貫通標本網による調査設計では、[4つの層に分割された] 調査地域全体について、4人の調査員から4つの独立した(同時並行的 [parallel] な) 推定値があたえられるように

なる。4つの推定値が大きく異なっているときには、調査結果の妥当性は疑わしい。このような場合、さらに詳しいデータ分析が行われて、最終の推定値があたえられれば、[推定値の] 食い違いを適切に取り扱うことができる。4つの層がそれぞれ4人の異なった調査者に割り当てられるときには、このような比較ないし批判的研究は不可能である。層の違いと調査員の違いが混在するからに他ならない。

以下では、これまでその意義について述べてきた相互貫通標本網による標本調査とその調査結果の利用を具体例に即して述べる。ただし、本稿の目的はマハラノビスによるローレンツ曲線拡充(多重化)の試みを明らかにすることであるから、それとの関連でマハラノビスが執筆した2つの論文<sup>(11)</sup>に限定して、彼の見解を紹介する。相互貫通標本網が初めて提起された早い時期の論文にかんする考察は本稿では行わないことによって、所期の目的に直截的に到達できると考えられるからである。

## 2. 標本統計とそのグラフ表示

### (1) 相互貫通標本調査と等区分グラフ分析法

ここでは、相互貫通標本網による標本調査

(11) ①Mahalanobis, Prasantha Chandra, "A Method of Fractile Graphical Analysis with some Surmises of Results," *Transactions of the Bose Research Institute*, Vol. 22, 1958 (以下 Mahalanobis [1958] と略記); ②ditto, "A Method of Fractile Graphical Analysis," *Econometrica*, Vol. 28, 1960 (以下 Mahalanobis [1960] と略記)。ローレンツ曲線の多重化が試みられているのは② Mahalanobis [1960] であるが、その基本構想は① Mahalanobis [1958] で述べられている。以下、2つの論文を適宜、参照する。

(10) Rao, C. R., *op. cit.*, p.574.

を相互貫通標本調査と言うことにする。上で述べたように、この標本調査では、各々の調査員が調査対象集団（母集団）のどの層においても標本抽出を行うことが前提とされている。マハラノビスは、ローレンツ曲線を2変量に拡張する試み（いわゆる多重化の試み）について述べた論文でも、相互貫通標本調査による標本統計を前提にして、論を進めた。その際、彼は①2変量正規母集団からの標本調査実験にもとづくデータと②インド全国標本調査（National Sample Survey of India）による標本統計（第7次調査 [1952年10月～1954年3月]、第8次調査 [1953年10月～1954年3月]、第9次調査 [1955年5月～1955年11月]の結果数字）を用いた<sup>(12)</sup>。

まず、以下ではマハラノビスの実験データ（上記①）を用いなくて、相互貫通標本調査を例解する。それは、マハラノビスの原論文では、結果数字の表章とそのグラフ表示を見ることはできるが、彼が行った標本調査実験については元のデータが不明で、標本調査からその分析までを一貫して「追体験」することはできないからである。このため、以下では、マハラノビスが行った相互貫通標本調査実験の進め方に従うが、その基本性格が明確となるように、マハラノビスの1958年論文よりも簡単な標本抽出実験によることとする。なお、マハラノビスの1958年論文でも、相互貫通標本網によって、2つの標本——これを彼は「副次標本（subsample）」と言っている——が得られたことを前提に話を進めているので、以下の相互貫通標本調査実験でも、標本調査に先立って行われる層別化はもとより、実査にいたる全過程がすでに完了し、標本が得られたものとして取り扱う。

標本調査実験の枠組みは次のようにな

る<sup>(13)</sup>。

- (1) 母集団は2変量正規分布  $N(0,0; 1,2; \frac{1}{\sqrt{2}})$  に従う。すなわち、2つの確率変数の実現値の組  $(x,y)$  として得られる標本の母集団について
  - (a)  $x$  の平均は0、分散は1
  - (b)  $y$  の平均は0、分散は2
  - (c)  $x$  と  $y$  の相関係数は  $\frac{1}{\sqrt{2}}$   $\left[ \frac{x \text{ と } y \text{ の}}{\text{標準偏差の比の値}} \right]$  である。
- (2) 2つの副次標本（標本の大きさはいずれも12）を抽出する<sup>(14)</sup>。そのそれぞれを第1副次標本（s.s.1）、第2副次標本（s.s.2）とする。
- (3) 2つの副次標本を併せて、1つの標本とする。これを「複合標本（combined sample）」と言う。この場合、複合標本の大きさは24になる。

#### ① データ

統計数値表（乱数表）から上記の条件を満たすデータを拾えば、表1(a)のようになる。

マハラノビスによれば、データを得た次の段階では、それぞれの副次標本について、第1変量( $x$ )をキー項目として、昇順にそのデータの組がソートされる。表1(a)のデータについてこのようにソートした結果が表1(b)である。

#### ② 等区分

マハラノビスによれば、ソート後に行われる手続きは、いずれの副次標本についても、その標本の構成要素を等しい個数にくくって、いくつかにまとめることである。マハラノビスは、副次標本を構成する要素のことを「単位（unit）」と言い、上述の手続きでまとめられた「単位」の集合を「グループ」と言っている。

(13) Mahalanobis [1960], pp.225ff.

(14) これを現実の家計調査に適用すれば、それは、調査員が2名で、それぞれ12戸の世帯を任意抽出するというを意味している。

(12) インドでは1回の全国標本調査が数次に分けられて実施される (Mahalanobis [1960], p. 325)。

表 1(a) 標本データ(1)

番 号	第 1 副次標本 (s.s.1)		番 号	第 2 副次標本 (s.s.2)	
	x	y		x	y
s.s.1- 1	-1.155	-2.570	s.s.2- 1	-0.968	-2.469
s.s.1- 2	-0.612	-2.434	s.s.2- 2	1.429	2.006
s.s.1- 3	-0.639	-1.018	s.s.2- 3	-0.469	-1.252
s.s.1- 4	-0.461	-1.221	s.s.2- 4	1.579	2.370
s.s.1- 5	0.131	1.580	s.s.2- 5	0.581	1.084
s.s.1- 6	0.904	0.784	s.s.2- 6	-0.362	0.021
s.s.1- 7	0.721	0.286	s.s.2- 7	2.809	5.306
s.s.1- 8	1.086	2.799	s.s.2- 8	-0.701	-0.925
s.s.1- 9	0.866	2.735	s.s.2- 9	-1.183	-1.487
s.s.1-10	-0.424	-0.777	s.s.2-10	0.065	0.677
s.s.1-11	1.446	2.337	s.s.2-11	-0.580	-2.805
s.s.1-12	-1.104	-1.719	s.s.2-12	-2.043	-1.993

注：1) 変量間の相関係数が  $\rho$  のときに、2 変量標準正規分布  $N(0,0;1,1;\rho)$  に従う変数の組み合わせを正規乱数の乱数表からもとめる方法については、下記『統計数値表』数値表編 p.431 および解説編 p.200 (表 4.3 K 10 の正規乱数表の列間の相関係数 [理論値]) 参照。

2) 標準正規分布  $N(0,1)$  に従う正規乱数を  $N(\mu, \sigma^2)$  に従う正規変量に変換する方法については下記『統計数値表』数値表編 p.431 参照。

(出所) 数値表編「K 10 正規乱数」表 16, (数値表編, p.435), 山内二郎編『統計数値表 JSA-1972』日本規格協会 1972 年。

表 1(b) 標本データ(2) — 等区分グループの編成 —

番 号	第 1 副次標本 (s.s.1)		番 号	第 2 副次標本 (s.s.2)	
	x	y		x	y
s.s.1- 1	-1.155	-2.570	s.s.2-12	-2.043	-1.993
s.s.1-12	-1.104	-1.719			
s.s.1- 3	-0.639	-1.018			
s.s.1- 2	-0.612	-2.434	s.s.2- 9	-1.183	-1.487
s.s.1- 4	-0.461	-1.221			
s.s.1-10	-0.424	-0.777	s.s.2- 1	-0.968	-2.469
s.s.1- 5	0.131	1.580	s.s.2- 8	-0.701	-0.925
s.s.1- 7	0.721	0.286			
s.s.1- 9	0.866	2.735	s.s.2-11	-0.580	-2.805
s.s.1- 6	0.904	0.784	s.s.2- 3	-0.469	-1.252
s.s.1- 8	1.086	2.799	s.s.2- 6	-0.362	0.021
s.s.1-11	1.446	2.337			
			s.s.2-10	0.065	0.677
			s.s.2- 5	0.581	1.084
			s.s.2- 2	1.429	2.006
			s.s.2- 4	1.579	2.370
			s.s.2- 7	2.809	5.306

このとき、どの「グループ」も同数の「単位」(要素)で構成されるようにする。このように同数の「単位」を内包する「グループ」のことを、マハラノビスは、「等区分(fractile)」と言っている。このような「等区分」の編成を経てグラフが描かれる。

ここで、かりにどの「グループ」にも等しく 3 つの「単位」が含まれるとすれば、第 1 副次標本についても第 2 副次標本についても、その「単位」は 4 等分される。したがって、「グループ」の個数は 4 つになる。このように副次標本を「等区分」にまとめ、その

それぞれの部分集団について誘導統計値をもとめて、それをグラフに表示し、標本統計を利用するというのが「等区分グラフ分析法」である。

さて、われわれは、マハラノビスにしたがって、第 1 変数である  $x$  をキーに変量の組を昇順にソートした (表 1 (b)参照)。その上で、今度は、3 つの「単位」ごとに、第 2 変数  $y$  の相加平均を計算する。2 つの副次標本にかんするその結果を表 2 の(1)欄と(2)欄に示した。

次に、2 つの副次標本を 1 つにまとめ、大きき 24 の 1 つの標本 (複合標本) と見なし、それについて、表 1 (b)を作成したときと同様の手順を適用する。そうすると、この複合標本についても、第 1 変数  $x$  をキーとして昇順に並べ替えられた、2 つの変量の組 ( $x, y$ ) があたえられることになる。その組の数は全部で 24 である。これを、副次標本と同様に 4 つのグループに分割し、そのそれぞれのグループごとに第 2 変数  $y$  について、その相加平均を計算する。この結果を表 2 の(3)欄に記した。(言うまでもなく、この複合標本では、1 つのグループのなかに含まれる「単位」の個数 (複合標本の大きき) は、副次標本の場合の 2 倍となって、6 である。)

### ③ 等区分グラフ

表 2 の(1)~(3)欄の数値を折れ線グラフで示せば、等区分グラフが完成する (図 1)。こ

の図において、第 1 副次標本 (s.s.1) の折れ線と第 2 副次標本 (s.s.2) の折れ線をマハラノビスはそれぞれ  $G(1)$ ,  $G(2)$  と表現している。そして、複合標本にかんする折れ線を  $G(1,2)$  として、これと  $G(1)$  あるいは  $G(2)$  との乖離を「誤差」と名づけた。そして、折れ線  $G(1)$  と  $G(2)$  で囲まれた領域 (図中網掛け部分) のことを「誤差領域 (error area)」と言って、 $a(1,2)$  と表している。この誤差領域が広がれば、それだけ 2 つの副次標本の乖離が大きくなるので、その

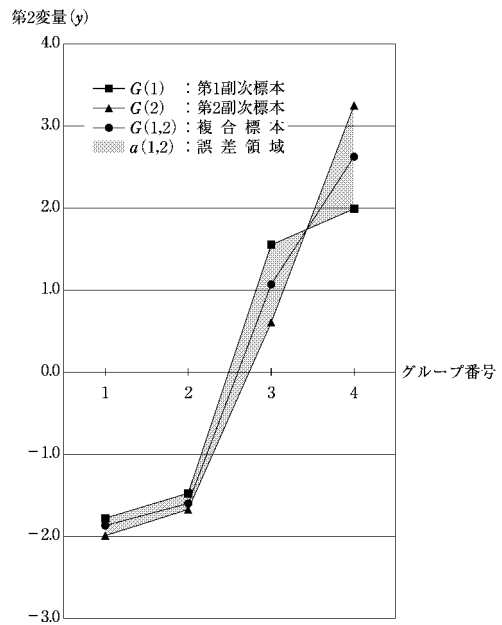


図 1 等区分グラフ

表 2 変数  $y$  の相加平均とその乖離

グループ番号	第 1 副次標本 (s.s.1) (1)	第 2 副次標本 (s.s.1) (2)	複合標本 (3)	乖離		
				(1)-(2)  (4)	(1)-(3)  (5)	(2)-(3)  (6)
1	-1.769	-1.983	-1.861	0.214	0.092	0.122
2	-1.477	-1.661	-1.585	0.184	0.108	0.076
3	1.534	0.594	1.064	0.940	0.470	0.047
4	1.973	3.227	2.600	1.254	0.627	0.627

注：1) 副次標本にかんする相加平均は、1 グループあたり 3 個の単位についてである。

2) 複合標本にかんする相加平均は、1 グループあたり 6 個の単位についてである。

ような場合には、副次標本を抽出した調査員のどちらかに（あるいは両方に）何らかのバイアスがかかっているのではないかと考えて、再調査その他の必要な措置が講じられることになる<sup>(15)</sup>。その際、とくに乖離が大きいグループについて重点的に再調査することも考えられる。表2からグループ別に2つの副次標本の値の差を計算すると、0.214(第1グループ)、0.184(第2グループ)、0.940(第3グループ)、1.254(第4グループ)である。すなわち、大きさの順にグループを並べると、第4グループ、第3グループ、第1グループ、第2グループとなる(表2(4)欄参照)。乖離の大きさがどの程度であれば、再調査が要請されるかについては一概には言えない、とマハラノビスは述べている。

#### ④ マハラノビスの「予想」

マハラノビスは、バッタチャルジー(Nikhilesh Bhattacharjee)の協力を得て大規模な標本調査実験<sup>(16)</sup>を実施し、相互貫通標本調査には次のような一般的傾向が見られることを「予想」した<sup>(17)</sup>。そしてさらに、その「予想」が実際のインド全国標本調査にも妥当することを確認した。以下、( )内にコメントを付して、マハラノビスの「予想」について述べることにする。

- (i) 等区分して得られるグループの数( $g$ )を一定とすれば、そのグループを構成する「単位」の個数( $n'$ )が大きいほど、誤差領域 $a(1,2)$ の面積は $\frac{1}{\sqrt{n'}}$ に比例して小さくなる。 $(n'$ の増大によって、グループ内の極端な値をとる「単位」の数量的規定性が減殺されると考えられる。)

(ii)  $n'$ (グループの構成要素[単位]の数)が一定であるとき、誤差領域 $a(1,2)$ の面積は $g$ (グループの数)に比例して増大する。(等区分グラフの横軸にはグループ番号が記載されるので、 $g$ が多ければそれだけ、グラフが横方向に伸びて全体的に大きくなり、 $a(1,2)$ の面積が広がると考えられている。)

(iii) 複合標本の折れ線グラフ $G(1,2)$ を構成する点(図1の●)について言えば、 $n'$ が大きくなるにつれて、より多くの点が $a(1,2)$ に落ちるようになる。(たとえ2つの副次標本の値がかけ離れていようともこれらの副次標本を合成して、複合標本を構成すれば、その複合標本内で極端な値をとる「単位」が相殺されることになる。この相殺作用は、それぞれの標本のグループ内で $n'$ が増大することによってさらに強まる。すなわち、複合標本では、 $n'$ の増大が副次標本におけるよりもさらに強く相殺の機能を果たすことによって、複合標本のグラフは $G(1,2)$ は $G(1)$ と $G(2)$ の間に落ちるようになる)と期待できる。)

以上要するに、マハラノビスの標本調査実験からは、等区分グラフにおける誤差領域の縮小には、(1)グループ内の「単位」の増大と(2)グループ数の減少が必要とされるという結論になる。しかし、この結論を現実の調査に適用するのは、そう簡単なことではないであろう。なぜならば、(1)は直接的に調査対象(標本の大きさ)の増大を意味し、いわゆる技術的制約(経費、労力、時間)から簡単に措置できることではないからである。また、(2)については、あまりにもグループの個数を少数に限定してしまえば、標本統計にかんするグループ間の比較がそれだけ少なくなり、結果としては副次標本どうしの比較が平板に

(15) 竹内啓編、前掲『統計学辞典』p.264。

(16) Mahalanobis [1958], p.226f.

(17) ここに言う「予想」をマハラノビスは控えめに surmises と言っている(Mahalanobis [1958], p.224f)。

なるという危惧を禁じえないからである。結局、実際の調査の場面では、「単位」とグループの適正な規模については、経費など一定の技術的制約のもとで現実的な対応がとめられることになるであろう。

### ⑤ 分離 (separation)

これまで、2変量正規分布  $N(0,0;1,2; \frac{1}{\sqrt{2}})$  に従う単一母集団からの標本抽出を取り扱ってきた。ところが、2つの標本にかんして時間的空間的な比較を行う場合、標本の背後には2つの異なる母集団を想定することが多い。実際に、マハラノビスは、等区分グラフ分析法をそのような場合にも拡張して応用している。これについては、「分離」という概念が重要な役割を演じている。そこで以下では、この基本概念の数理的意味とその数学的性質にたいするマハラノビスの「予想」について述べることにしよう。彼によれば、「分離」は2つの母集団のそれぞれから抽出された標本（より正確には複合標本）間の乖離を意味する。

すで述べたように、相互貫通標本調査では母集団から2つの副次標本が抽出され、そのそれぞれの副次標本について等区分グラフ  $G(1)$  と  $G(2)$  が描かれる。さらに、複合標本については等区分グラフ  $G(1,2)$  が描かれることになる。他方で、第2の母集団から抽出された複合標本についても、同様に、等区分グラフを描くことができる。このグラフを、上で描いた(図1の)等区分グラフ  $G(1,2)$  と区別するために、 $G'(1,2)$  と書くことにする。

マハラノビスの「分離」とは、この2つの等区分グラフ  $G(1,2)$  と  $G'(1,2)$  とに囲まれた領域の面積のことである。これを、マハラノビスは  $S(1,2)$  と書いている（ただ単に  $S$  と書かれることもある）。マハラノビスはこの  $S(1,2)$  の誤差  $E$  を

$$E = \sqrt{a^2(1,2) + a'^2(1,2)}$$

ただし、 $a(1,2)$  は第1の母集団から抽出された副次標本にかんする誤差領域、また、 $a'(1,2)$  は第2の母集団から抽出された副次標本にかんする誤差領域

と定義した。そして、 $S^2/E^2$  を検定統計量として、観測された分離の有意性が検定可能であることを示唆している<sup>(18)</sup>。

以下で「分離」を図示する。そのために便宜的に2つの母集団のうち第1の母集団（2変量正規）は図1をあたえた母集団  $N(0,0;1,2; \frac{1}{\sqrt{2}})$  と同一であり、しかもそこからの標本抽出実験の結果も図1を作図したときのデータと同一であるものとする。すなわち、第1の母集団にかんする複合標本の等区分グラフ  $G(1,2)$  がそのままここでも活用できるものとする。これにたいして第2の母集団（2変量正規）は  $N(1,1.5;1,4; \frac{1}{2})$  に従うものとする。その母集団からの標本抽出によって得た2つの副次標本にもとづいて複合標本を構成する。このときの等区分グラフは  $G'(1,2)$  である。このグラフの上に先に述べた第1の母集団からの複合標本にかんする等区分グラフ  $G(1,2)$  を重ねると、図2のようになる。

この図2における2本の折れ線で囲まれた（ハッチングをほどこした）領域が、マハラノビスの言う「分離」（ $S(1,2)$  あるいは  $S$ ）である。彼は、この「分離」も「誤差領域」と同様に、そのグラフを方眼紙上に描けば、その大きさを測定できると言っている。

(18) この検定統計量は「基準統計量 (criterion)」と言われ、これが「第1次近似として  $\chi^2$  のような分布に従う」とマハラノビスはその期待するところを述べているが、それは surmise の域を脱するものではない (Mahalanobis [1960], p.224)。



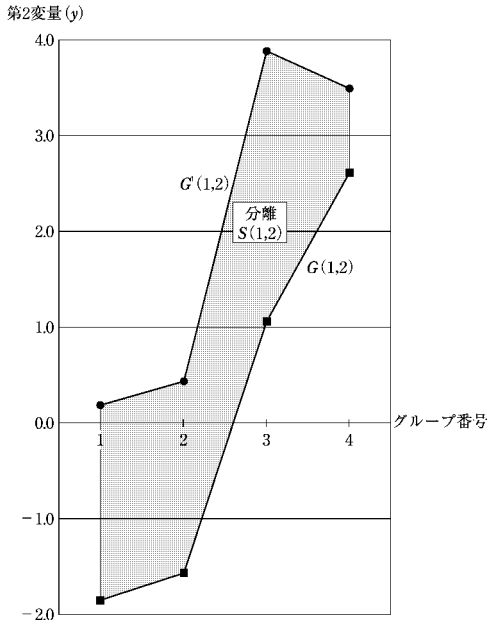


図2 複合標本の分離

- 1) 等区分グラフ  $G(1,2)$  は図1に同じ。
- 2) 等区分グラフ  $G'(1,2)$  にかんする標本調査実験の仕方・様式は  $G(1,2)$  と同様である。
- 3) 2つの等区分グラフの母集団は次のとおりである。  
 $G(1,2)$  の母集団:  $N(0, 0; 1, 2; \frac{1}{\sqrt{2}})$   
 $G'(1,2)$  の母集団:  $N(1, 1.5; 1.4; \frac{1}{2})$
- 4) ここでも変量  $x$  と  $y$  の相関係数は、それぞれの変量の標準偏差の比としてあたえられている。

(2) 2変量ローレンツ曲線

マハラノビスが等区分グラフ分析法について述べた論文としては、少なくとも1958年論文と1960年論文の2編がある。

第1論文(1958年論文)では、標本抽出実験によって、副次標本を等区分するときのグループの個数やグループを構成する「単位」の個数があたえる推定結果の「正確さ」にたいする影響を調べ、またその実験結果がインド全国家計調査による標本統計でも確認できるかどうかを考察している。その意味では第1論文(1958年)は基礎理論的研究の成果である。

これにたいして、第2論文(1960年論文)では、等区分グラフ分析法をインド全国標本調査

に適用し、その結果数字にもとづくインド社会の分析にまで、その検討が進められている。ローレンツ曲線が2変量に拡張されたのは、この分析においてであった。以下では、第2論文にもとづいて、そのことについて述べる。

① 調査データ

データは表3(次ページ)に要約した標本調査で得られた。

② 等区分グラフ(その1)

マハラノビスは、第1変量  $x$  を世帯員1人あたりの消費支出総額、また第2変量  $y$  を世帯員1人あたりの穀類消費支出とする等区分グラフ(2つの副次標本と1つの複合標本)を次のような手順で作成した。第7次調査と第9次調査のいずれについても同様の手続きで等区分グラフが作られたので、以下では、主として第7次調査をとりあげ、第9次調査については省略的に叙述する。

(i) 第7次調査について、第1変量(世帯員1人あたりの消費支出総額)  $x$  のデータを昇順にならべて、世帯の相対度数ごとにまとめる(付表1(a), 第9次調査については付表1(b))。

(ii) 第7次調査について、世帯の相対度数ごとに第1変量(世帯員1人あたりの消費支出総額)  $x$  の値と第2変量(世帯員1人あたりの穀類消費支出)  $y$  の値を対応させる。そして、第2変量  $y$  に着目し、その  $y$  の値を世帯の相対度数と対応させた表を作成する(付表2(a), 第9次調査については付表2(b))。

(iii) 以上の手続きで作成された2枚の表にもとづいて、等区分グラフを作成する<sup>(19)</sup>(図3)。

(19) 用いたデータは、付表1(a)(b)の(2), (3), (4)欄(以上、横軸)および付表2(a)(b)の(2), (3), (4)欄(以上、縦軸)である。

この図 3 の見方は次のとおりである。横軸が上下に 2 本引かれている。いずれも第 1 変量(世帯員 1 人あたりの全消費支出)  $x$  についてである。ただし、上方の横軸は第 7 次調査についてであり、下方の横軸は第 9 次調査についてである。

上下 2 本の横軸のいずれについても、2 段に数字が記載されている。一方の数字(10, 20, ……)は消費支出総額の小さな世帯から順に並べたときの(世帯の)相対度数である。他方の数字(第 7 次調査 [上方の横軸] にあっては 0.0, 7.1, 9.3 ……, 第 9 次調査 [下方の横軸] にあっては 0.0, 5.9, 7.8 ……)は、それに対応する相対度数を上限とする等区分グループの消費支出総額である。

これらの数値は第 7 次調査については付表 1 (a)の(4)欄に、また第 9 次調査については付表 1 (b)の(4)欄に対応している。

これにたいして、縦軸は第 2 変量(世帯員 1 人あたりの穀類消費支出)  $y$  を表わしている(付表 2 (a)(b)の(2)~(4)欄)。

### ③ 等区分グラフ(その 1)の解釈

(i) 図 3 では第 7 次調査についても、第 9 次調査についても、それぞれ 3 本の折れ線が描かれているが、いずれの場合の複合標本にかんする等区分グラフ[ $G(1,2)$ と $G'(1,2)$ ]も、おおむね副次標本にかんする等区分グラフ([ $G(1)$ と $G(2)$ ]および[ $G'(1)$ と $G'(2)$ ])に挟まれた「誤

表 3 インド全国標本調査(郡部, 関連分のみ)

		第 7 次調査	第 9 次調査	
調査年月		1953 年 10 月~1954 年 3 月	1955 年 5 月~11 月	
調査期間		30 日間	30 日間	
相互貫通標本 関連事項	第 1 副 次標本	標本世帯数	702	768**
		村落*の数	476	768**
	第 2 副 次標本	標本世帯数	711	768**
		村落*の数	478	768**
	複合標本	標本世帯数	1,413	768
		村落*の数	954	1,536
	第 1 変量	$x$	世帯員 1 人あたりの消費支出総額	
	第 2 変量	$y$	世帯員 1 人あたりの穀類消費支出	

(参考)

郡部の推定世帯数	6,340 万世帯	6,530 万世帯
郡部の推定人口	3 億 2,400 万人	3 億 8,800 万人
1 人あたり推定消費支出総額(30 日間)***	5,565 ルピー	5,131 ルピー
村落の総数(1951 年センサス)	603,168	

訳注\* ここに村落の原語はマウザ(mauza)である。これは、インド税務行政の基礎単位(Indian revenue unit)であり、村落(village)にあたる。出所(p.329)参照。

訳注\*\* マウザの総数は 772 であったが、居住者のいないマウザが 4 つあった。第 9 次調査では 1 つのマウザから 2 世帯を抽出し、そのうちの 1 世帯をいずれか一方の副次標本に編入し、その「単位」とした。

訳注\*\*\* 出所(p.332)では、執筆時(1960 年)の物価水準に調整済みと注記されている。

(出所) Mahalanobis, P. C., "A Method of Fractile Graphical Analysis," *Econometrica*, Vol. 28, 1960, p.329, p.332 の叙述にもとづいて作成。

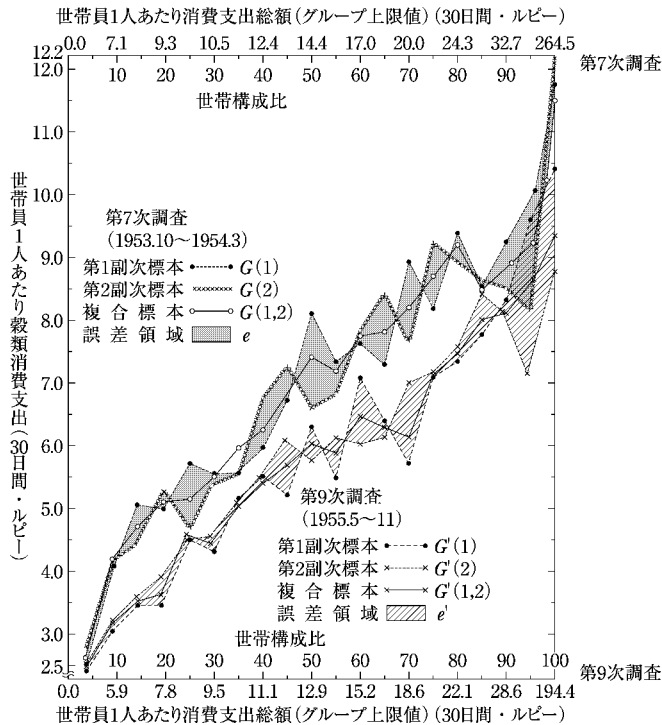


図3 世帯員1人あたり穀類消費支出(30日間, ルピー) — インド全国標本調査 —

(出所) Mahalanobis, Prasanth Chandra, "A Method of Fractile Graphical Analysis," *Econometrica*, Vol. 28, 1960, p.333.

差領域」 $e$ および $e'$ のなかにある。このことから、消費支出総額の増加に伴って、穀類消費支出が増加する「一般的傾向」を読み取ることができる、とマハラノビスは言っている<sup>(20)</sup>。

(20) マハラノビスはこのことを「[穀類への] 支出増加の一般的傾向は結合誤差 [誤差領域] の和に較べて有意である」と言っている (Mahalanobis [1960], p.333f.)。しかし、帰無仮説が陽表的に立てられて有意性検定が行われているわけではない。このため、この後、等区分グラフについてのマハラノビスの解釈を紹介するときも、「有意」という表現は本文では用いないで注記するに留めることにする。

ここで、マハラノビスが「有意」という表現を用いたことについて考察してみよう。そこでは、第7次調査(もしくは第9次調査)にかんする2つの(たとえば、複合標本にもとづく)等区分グラフには「差はない」という「帰無仮

説」が暗黙のうちに立てられていると想定してみると、この「有意」という言葉の意味を理解することができよう。すなわち、まず、そのような「帰無仮説」のもとで、「誤差領域」を基準にして2本の折れ線グラフ(等区分グラフ)の乖離を比較する。その結果、2本の折れ線グラフの間の乖離が偶然によるものではなく、実質的な違いによるものであると判断されたとする。このことを、数理統計学では「2つの標本は、同一の母集団からの標本ではない」と言い、結果として「帰無仮説」(2つの標本が抽出された母集団は同一であって、違いはないという仮説)が棄却されることになる。このとき、2本の折れ線グラフが物語る事実は、帰無仮説を棄却するにあたって意義のある(significant)データであったので、その意味で、この調査結果データは「有意(significant)な結果」と言われる。マハラノビスが、等区分グラフの比較において有意性に言い及ぶのはこのためではないかと考えられる。

(ii) 図3には、第7次調査(調査期間は1953年10月~1954年3月)と第9次調査(調査期間は1955年5月~11月)についての2本の複合標本に於いて2本の等区分グラフ[ $G(1,2)$  および  $G'(1,2)$ ]も描かれている。この2本の折れ線を隔てている「分離」を、低額の消費支出世帯から数えて80%までの世帯について見ると、2つの「誤差領域」 $e$ および $e'$ の和よりも「大雑把に言って大きいように思われる。」このため、80%までの世帯層については、穀類支出額は第9次調査の時点のほうが低額である<sup>(21)</sup>。これ

は、第9次調査のころに穀類価格が低落したこととよく符合する。

(iii) 80%を越える上位グループについては、「分離」は「誤差領域」の和(「結合誤差」)よりも小さいので、上に述べたような、第7次調査に較べて第9次調査のほうの穀類消費支出が低額であるという傾向にはない<sup>(22)</sup>。

④ 等区分グラフ(その2)とその解釈

縦軸の数値を替えて図3と同様の手続きをほどこせば、新たな等区分グラフ(図4)を作成することができる。この等区分グラフに

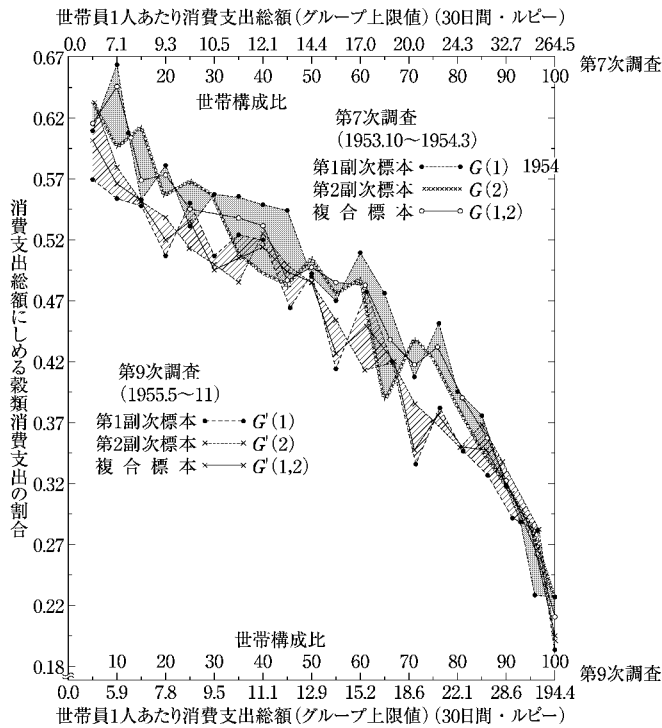


図4 消費支出総額に占める穀類消費支出の割合 — インド全国標本調査 —

訳注：横軸のデータは付表1(a)(b)の(2), (3), (4)欄の数値に、また、縦軸のデータは付表2(a)(b)の(5), (6), (7)欄の数値に、各々対応している。

(出所) 図3に同じ (p.337)。

21) 「世帯の80%までについて穀類支出が第9次調査では[第7次調査と較べて]減少しているということは、統計的に有意であると考えられる。」(Mahalanobis [1960], p.334.)

22) 「全体として、上位20%のグループについては、1人あたりの穀類への平均的な支出の減少は、まったく有意ではない。」(Mahalanobis[1960], p.334.)

おける上下2本の横軸は、図3と同様であり、第1変量の値  $x$  (消費支出総額) を示している。他方、縦軸(第2変量)の値  $y$  は穀類への支出が消費支出総額にしめる割合である。

マハラノビスは、図4を次のように解釈している<sup>(23)</sup>。すなわち、(1)全体的に見て、第9次調査( $G'$ )のほうが第7次調査( $G$ )よりも下にあつて、穀類消費支出が消費支出総額にしめる割合は低い傾向にあること、(2)「分離」が誤差領域より「かなり小さい」こと、(3)縦軸の数値(穀類消費支出が消費支出総額にしめる割合)は消費支出総額の変動に較べて、「安定的な傾向」を示していること、である。

⑤ 多重ローレンツ曲線

今、④で述べたことをさらに明確に表現する目的で、マハラノビスは、世帯の累積相対度数を横軸にとり、消費支出額(穀類消費支出と消費支出総額)の累積相対度数を縦軸とする「集中曲線(concentration curve)」(ローレンツ曲線)を描いた(図5(a)(b)<sup>(24)</sup>)。そこでは1枚のグラフに(2種類の経済量にかんする)複数のローレンツ曲線が描かれている。この点が、通常のローレンツ曲線とは異なっている。これを本稿ではD.ウィリアムソンにならって、「多重ローレンツ曲線(Multi Lorenz Curve)」<sup>(25)</sup>とすることにする。そして、この用語に示唆を受けて、本稿では、

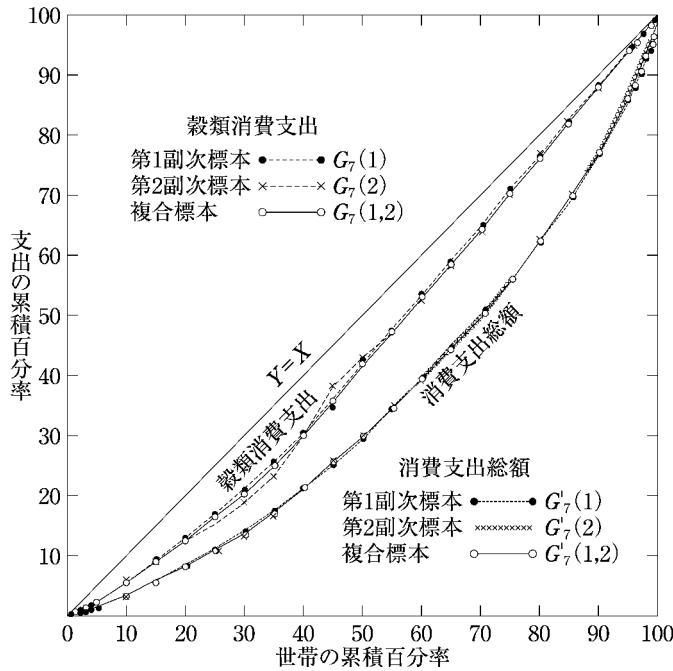


図5(a) 消費支出総額と穀類消費支出の累積百分率(多重ローレンツ曲線:その1)  
— インド全国標本調査第7次調査(1953年10月~1954年3月) —  
(出所) 図3に同じ(p.338)。

(23) Mahalanobis [1960], p.336f.

(24) この図のデータは付表3(a)(b)である。

(25) この用語(Multi Lorenz Curve)については、Williamson, Duncan, "Lorenz Curve 1," (<http://www.duncanwil.co.uk/lorenz1.html>,

accessed on Dec. 1, 2003) 参照。そこでは1つのグラフに、税引き前と税引き後の所得分布について、2本のローレンツ曲線が描かれ、その図のタイトルは「所得分布—多重ローレンツ曲線」となっている。

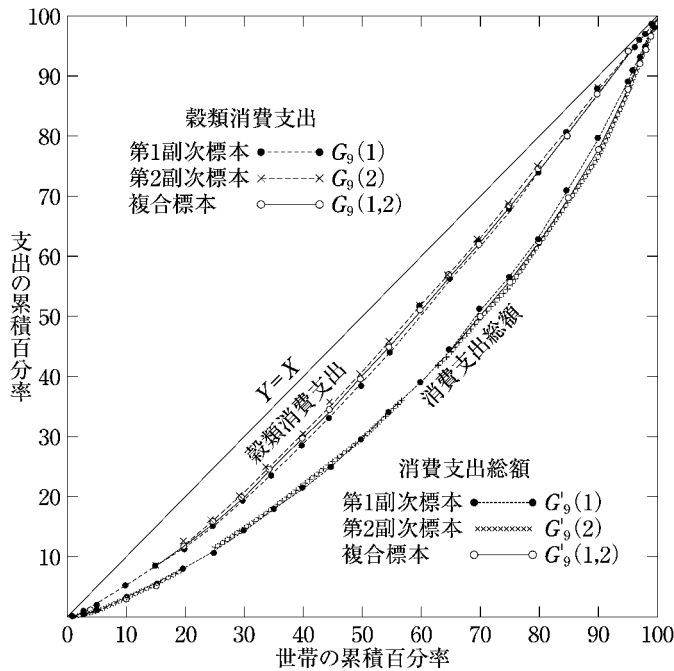


図5(b) 消費支出総額と穀類消費支出の累積百分率 (多重ローレンツ曲線：その2)

—インド全国標本調査第9次調査(1955年5月～11月)—

(出所) 図3に同じ (p.339)。

2つ以上の変数にたいしてローレンツ曲線を拡張することをローレンツ曲線の「多重化」と言うことにした。本稿「はじめに」でラオがマハラノビスの功績としてローレンツ曲線を2変数に拡張した点を挙げていと指摘したが、それはこの多重化を意味する。

これらの図をマハラノビスは次のように解釈している。すなわち、(1)第7次調査(図5(a))についても、第9次調査(図5(b))についても、複合標本にかんする2本の曲線[図中の $G_7(1,2)$ と $G_7'(1,2)$ および $G_9(1,2)$ と $G_9'(1,2)$ ]が作る「分離」は、それぞれの誤差領域の和よりも「相当大きい」こと<sup>(26)</sup>、(2)いずれの調査においても、穀類消費支出の曲線は、消費支出総額の曲線よりも、均等直線(45度線)に近いこと。(3)以上か

ら、穀類消費が非弾力的であると確認できること。

次に、マハラノビスは、第7次調査と第9次調査のいずれにおいても、複合標本にかんするローレンツ曲線が2点(x軸の値で言えば、50%付近と90%付近)で交差していることに着目した(図6(a))。そして、穀類支出にかんするローレンツ曲線について、その交差する区間の前後を拡大して表わした(図6(b))。

マハラノビスは、この図6(a)(b)について次のように述べている<sup>(27)</sup>。

[図6(b)の]斜線[網かけ]部分はそれぞれの[等区分]グラフと結合した誤差[誤差領域]を示している。2次にわたる調査にかんする2つのグラフ

(26) これは、穀類消費支出と消費支出総額の動向とが同一ではないことを意味する。

(27) Mahalanobis [1960], p.342

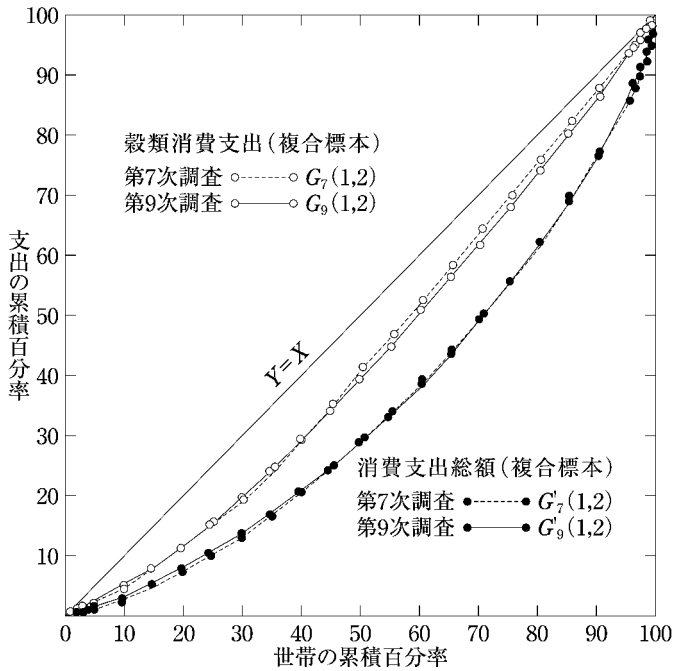


図 6(a) ローレンツ曲線の交差 (その 1)  
(出所) 図 3 に同じ (p.342)。

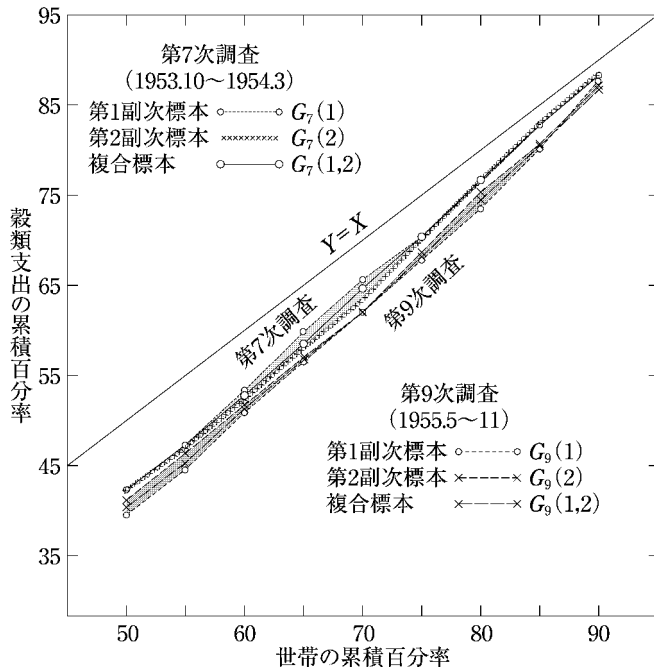


図 6(b) ローレンツ曲線の交差 (その 2)

訳注：これは、図 5 (a)(b)における穀類消費支出にかんする集中曲線の上方を拡大したものである。  
(出所) 図 3 に同じ (p.343)。

$G(1,2) [G_7(1,2)]$  と  $G'(1,2) [G_9(1,2)]$  の「分離」は全体として 2 つの結合誤差領域よりも幾分広い。実際にもそうであるならば、そのことは、大雑把に言って、世帯の 50%~90% という中央部分 [1 人あたりの [消費] 支出総額が 30 日間で 13~14 ルピー~30~32 ルピー] の範囲では、穀類支出額は、[穀類の] 物価が上昇する場合には、必要以上に多くなる傾向にあることを示している。ただし、この観測された差異はとても小さな標本にもとづいているので、偶然そうなったのかもしれない。より大きな標本でもっと注意深く研究することが肝要であろう。

#### ⑥ 等区分グラフ (その 2)

マハラノビスは以上に述べた他にも別の標本統計を用いて、2 つの副次標本とそれにもとづく 1 つの複合標本にかんする等区分グラフを描いている。それは、インド全国標本調査第 8 次調査 (1954 年 7 月~1955 年 4 月) で得られた (標本世帯の) 土地所有規模データにかんするグラフである。マハラノビスはこれによって、ウェスト・ベンガル州 (West

Bengal) とアンドラ州 (Andhra) とにかんする、同一時点における地域間比較を行った (表 4 参照)。

いずれの州の標本世帯についても、その所有する土地面積 (エーカー) の昇順に世帯を並べ替え、等区分グループ別に、

- (i) グループ内の面積の上限 [付表 4 (a) (b) の (2), (3), (4) 欄],
- (ii) 着目したグループまでの所有面積の合計が占める全体の面積にたいする割合 (面積にかんする累積百分率) [付表 4 (a)(b) の (5), (6), (7) 欄],
- (iii) グループ内の面積の平均 [付表 4 (a) (b) の (8), (9), (10) 欄]

を表にまとめた。そのうち、上記の (iii) にかんする等区分グラフがマハラノビスの 1960 年論文に掲載されている (図 7 (a)(b)(c))。

#### ⑦ 等区分グラフ (その 2) の解釈

図 7 (a) についてマハラノビスは次のように言っている<sup>(28)</sup>。

- (i) 80% のところで 2 つの州の誤差領域は重なる。「利用できる標本にもとづけば」という限定つきではあるが、

表 4 地域間比較関連情報 (調査期間: 1954 年 7 月~1955 年 4 月)

		ウェスト・ベンガル州	アンドラ州
村落総数		38,590	18,912
抽出村落		18	
推定世帯数		5,413,000	4,066,000
標本世帯数	第 1 副次標本	569	343
	第 2 副次標本	406	360
	複 合 標 本	975	703
変量		世帯別土地所有面積 (エーカー)	
原表		付表 4 (a) の (8), (9), (10) 欄	付表 4 (b) の (8), (9), (10) 欄

訳注: 1 エーカー  $\approx$  4,046.8 m<sup>2</sup>。

(出所) Mahalanobis [1960], p.343, p.347 の記述から作成。

(28) Mahalanobis [1960], pp.346ff.



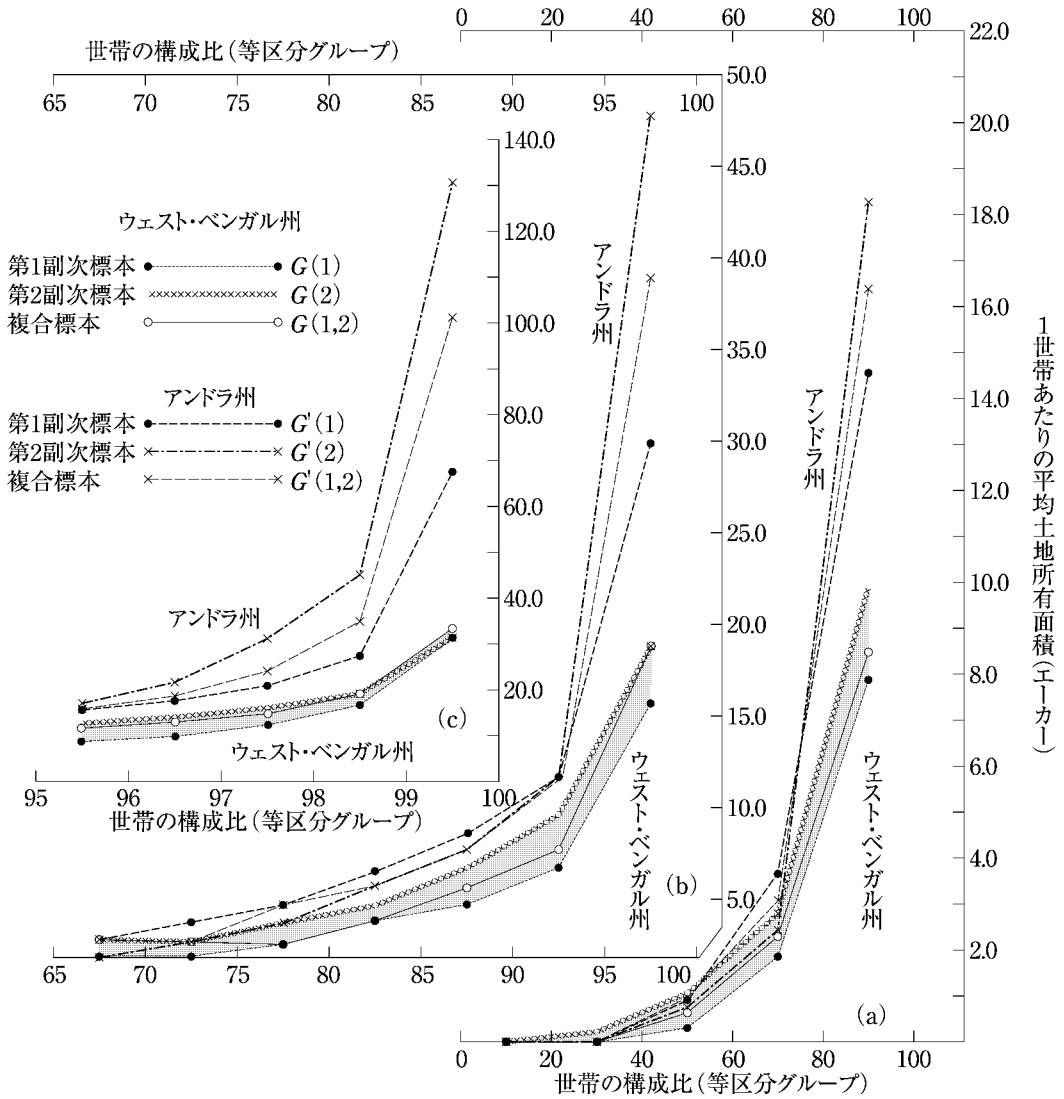


図7 等区分グループ間隔別土地所有面積分布

訳注：この図の元のデータについては付表4(a)(b)の(10)欄における(a), (b), (c)参照。  
(出所) 図3に同じ (p.347)。

80%までの所有規模にかんしては両州に差異はない。

- (ii) 上位20%のグループでは所有面積の平均値にかんする両州の差異は明確である。
- (iii) 上位20%のグループではアンドラ州の平均値は著しく高い。

図7(b) (65%超のグループ) にかんして、

マハラノビスはいわゆる「分離」を基準にして次のように解釈している。

- (i) 90%~95%のグループでは両州に差異があると言ってよい<sup>(29)</sup>。
- (ii) 80%~85%のグループは、両州に差

(29) マハラノビスはこの差異は「有意」と述べている (Mahalanobis [1960], p.348)。

異があるかどうかの分岐点にある<sup>(30)</sup>。  
 そして、最後にマハラノビスは、95%～100%のグループについては図 7 (b)と(c)を総合的に見て、次のように言っている。すなわち、90%のところでも両州間の差異を認めることができ、グラフの上では明確に「分離している」[この場合は「差異がある」という意味である]。しかし、マハラノビスは等区分グラフ分析法の「しなやかさ (flexibility)」<sup>(31)</sup>を肯定的に評価しつつも、他方では、この土地所有調査における調査村落数がわずかに 18 であって (表 4 参照)、「極端に小さい標本」であることに留意するよう、注意を喚起している。ここに「しなやかさ」とは、データを等区分グラフにまとめるときに、図 7 (a)(b)(c)が示すように、区間の幅を適宜、自在に変化させようことを意味しているものと解釈される。

## む す び

本稿では、ローレンツ曲線の拡充にかんするマハラノビスの見解を見てきた。ラオによ

れば、ローレンツ曲線を 2 変量に拡張したことは、後世に残るマハラノビスの功績であると言われている。本稿でその概略を紹介・解説したように、ローレンツ曲線の多重化は「等区分グラフ分析法」の延長線上に位置づけることができよう。

本稿の考察結果を要約すれば、次のようになる。

- (1) 相互貫通標本調査は、標本統計に含まれる非標本誤差にたいする配慮から構想された。
- (2) 相互貫通標本調査から得られた結果数字の利用法として、等区分グラフ分析法が構想された。
- (3) 等区分グラフ分析法は、ローレンツ曲線を多重化する試みよりも前に構想された。
- (4) ローレンツ曲線の多重化は、等区分グラフ分析法の一形態である。
- (5) マハラノビスの多重ローレンツ曲線は、生計費の構造分析に資するべく作成された。

本稿は、マハラノビスの業績のうち、限られた分野の業績を取りあげ、しかも限られた論文の紹介とその解説を試みたものである。その意味で「資料」に位置づけられる。紹介・解説の範囲を越える論点については、今後の検討課題としたい。

(30) マハラノビスはグラフの関連区間は“the verge of significance”であると述べている (Mahalanobis [1960], p.348)。

(31) Mahalanobis [1960], p.348.

[補注] ローレンツが構想した累積相対度数による分布研究は、マハラノビスによる多重化の他に、少なくとも 2 つの分野で応用されている。その第 1 は、企業経営の分野における ABC 分析である。1951 年にジェネラル・エレクトリック社の H. フォード・ディッキー (H. Ford Dickie) が考案した「ABC 分析」は、その一例である。その構想をはじめて明らかにしたディッキー論文のタイトルは“Shoot for Dollars, not for Cents”であると言われている (“Pareto Analysis,” Glossary of Manufacturing [http://www.glossaryofmanufacturing.com/a.html],

accessed on Nov. 20, 2003)。

ここで、ある会社の売上高を例に ABC 分析を例解する。横軸にはその会社での売上高の降順に取扱商品を配列する。縦軸は商品別に売上高の累積相対度数を示している。そして、その会社の総売上高に占める割合が、たとえば上位 80%となる商品群を A ランク (A グループ) とし、以下、総売上高の 15%となる商品群を B ランク、5%となる商品群を C ランクに分類する (この割合は固定的なものではない。次頁の図参照)。これによって、その会社の重点商品 (群) が分かるようになる。下のグラフは上に凸であ

り、なじみの深いローレンツ曲線とは逆の形状を示しているが、累積相対度数のグラフ表示という点では、ローレンツ曲線と同一である。このために、ABC分析の考え方がローレンツの構想を土台としていることは、つとに指摘されているところである(“Geschichte der ABC-Analyse,” HP of ABC-Analyse.info[http://www.abc-analyse.info/abc/geschichte.html], accessed on Nov. 20, 2003)。

このように、ディッキーの経営管理手法は、A, B, Cの3ランクに分類することを目的とするところから、ABC分析と呼ばれてきたが、この手法は、「パレート分析 (Pareto Analysis)」とも呼ばれることがある。パレートの名を冠するようになった事情については、一般に次のように言われている。すなわち、イタリアにおける国民資産の分配を研究したヴィルフレド・パレート (Vilfredo Pareto) (スイス・ローザンヌ大学, 1848-1923) は、資産の80%を所有している国民が全国民のわずか20%にすぎないことから、「8割2割の原則 (80/20 Regel)」を見出したが、ディッキーはこの着想を企業経営に適用した。このため、ABC分析は、パレート分析とも言われるようになったというのが、通説である。

さらに通説では、パレートが「8割2割の原則」の原型を形作ったのは、ローザンヌ大学時代のこととされている。農業経済研究所 (Reale Accademia Economico-Agraria dei

Georgofili di Firenze) に勤めていたパレートが親友マッフェオ・パンタレオーニ (Maffeo Pantaleoni, 1857-1924) の薦めで、レオン・ワルラス (Léon Walras, 1834-1910) の後任としてフィレンツェからローザンヌに居を移したのは、1893年であるから、この「原則」は明らかにそれ以降の研究成果ということになる。しかし、80%/20%という数字はともかくとして、富の大部分が少数の人々に集中しているという指摘は、パレート以前にもなされており、その点から見ると、パレートがABC分析の「もとい」を作ったかどうかについては、今後さらに検討する余地がある。それだけでなく、「8割2割の原則」をそもそもパレートの名と結びつけてよいかどうかについては、疑念を呈している論者もいて、パレートとABC分析の関係については明確にすべき点が残されている (cf. Koch, Richard, *The 80/20 Principle: The Secret to Success by achieving more with less*, New York etc. 1998, p.263f.)。

なお、ABC分析図に酷似したものとしては、日本への品質管理思想の移植・普及に努めたJ. M. ジュランの「パレート図」がある。不良品の製造要因を例にしてこれを説明すると次のようになる。縦軸に不良品の累積相対度数をとる。また、横軸に不良品を生み出す要因を配列する。このとき、横軸に記載される要因は、製造された不良品の個数の降順に配列する。そして、その要因別に不良品の相対度数をもとめ、さらに

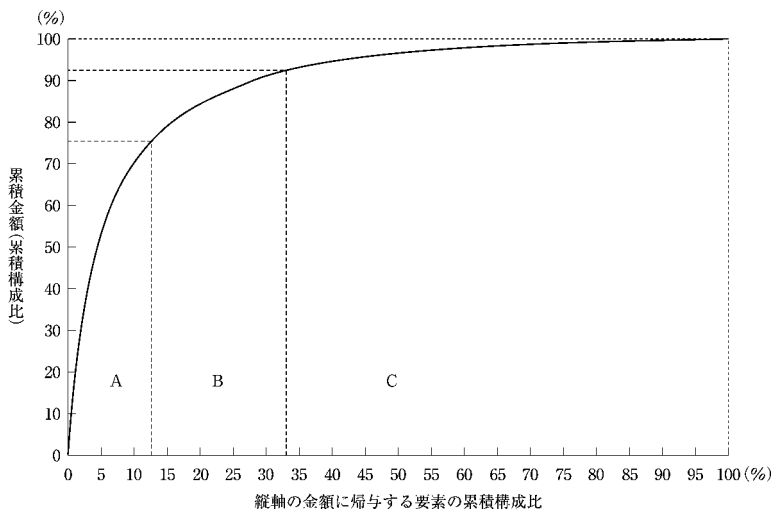


図 ABC分析図

(出所) “Sinn & Zweck der ABC-Analyse,” <http://www.abc-analyse.info/abc/> [accessed on Nov. 20, 2003] にもとづいて作成。

重大な（より多くの不良品を生み出した）要因の順に、不良品の累積相対度数をもとめて、グラフに描けば、前頁の図のような形状のグラフができる。したがって、グラフの形状だけを見れば、それはディッキーの ABC 分析（パレート分析）と同様である。しかし、ABC 分析では要因が A, B, C の順にランクづけされているのに対して、ジュランのパレート図では、少なくともその初期の構想段階においては、要因のランクづけがなされていなかったため、この点が両者のあいだの小さな違いであると言うこ

とができる。ジュランについては次を参照。① Juran, J. M., “Universals in Management Planning and Controlling,” *The Management Review*, Nov. 1954; ② ditto, “Pareto, Lorenz, Cournot, Bernoulli, Juran and others,” *Industrial Quality Control*, Vol. 17, No. 4, Oct. 1960; ③ ditto, *Quality Control Handbook*, New York 1962 [2<sup>nd</sup> edn.] (東洋レーヨン訳『経営革新のための品質管理 (品質管理ハンドブック I)』日科技連, 1966 年 第 1 章)。

付表1(a) 世帯員1人あたり消費支出総額(30日間)[その1]  
 — インド全国標本調査第7次調査(全国・郡部, 1953年10月~1954年3月) —

系列 番号	等区分 グループ (%)*	消費支出総額(30日間1人あたり) (ルピー)					
		グループの上限值			グループの平均値		
		第1副次標本	第2副次標本	複合標本	第1副次標本	第2副次標本	複合標本
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
1	1	2.60	3.25	3.00	2.44	2.20	2.23
2	2	3.00	4.13	3.38	2.91	3.74	3.14
3	3	4.00	4.75	4.57	3.35	4.54	4.10
4	4	5.00	4.83	4.83	4.63	4.78	4.73
5	5	5.57	5.25	5.50	5.32	4.99	5.13
6	0-5	5.57	5.25	5.50	3.75	3.99	3.85
7	5-10	7.25	6.88	7.11	6.63	6.24	6.39
8	10-15	8.25	7.90	8.00	7.72	7.46	7.54
9	15-20	9.29	9.00	9.25	8.77	8.53	8.64
10	20-25	9.80	9.67	9.75	9.58	9.43	9.51
11	25-30	10.60	10.25	10.50	10.22	9.93	10.03
12	30-35	11.83	11.00	11.40	11.24	10.69	10.95
13	35-40	13.00	12.00	12.43	12.44	11.45	11.94
14	40-45	14.00	13.00	13.50	13.37	12.48	12.83
15	45-50	14.75	14.25	14.40	14.23	13.64	14.00
16	50-55	16.00	15.25	15.67	15.40	14.73	15.02
17	55-60	17.60	16.60	17.00	16.82	15.99	16.37
18	60-65	18.80	18.00	18.45	18.34	17.22	17.78
19	65-70	21.00	19.25	20.00	19.90	18.67	19.18
20	70-75	22.00	22.00	22.00	21.39	20.49	21.11
21	75-80	25.00	24.00	24.33	23.34	23.02	23.12
22	80-85	27.67	28.00	28.00	26.63	26.09	26.40
23	85-90	32.75	32.33	32.67	30.07	29.74	29.95
24	90-95	43.67	39.00	41.33	37.17	35.81	36.14
25	95-100	226.00	264.50	264.50	74.11	58.97	64.98
26	96	47.00	43.00	45.33	45.76	41.97	43.86
27	97	59.00	48.00	51.00	51.91	45.51	47.34
28	98	72.17	53.50	61.00	66.35	51.37	54.08
29	99	76.00	65.25	74.33	75.46	59.64	67.05
30	100	226.00	264.50	264.50	118.11	142.48	122.59
31	0-20				6.74	6.49	6.64
32	20-40				10.88	10.49	10.66
33	40-60				14.92	13.97	14.44
34	60-80				20.52	19.91	20.20
35	80-100				39.77	36.45	38.03
36	0-25				7.30	7.11	7.18
37	25-50				12.41	11.73	12.03
38	50-75				18.20	17.45	17.83
39	75-100				36.45	33.44	34.86
40	0-50				9.88	9.58	9.73
41	50-100				26.57	25.20	25.87
42	0-100				17.65	16.28	17.24

訳注* : 世帯の相対度数。以下の付表も同様。	第1副次標本	第2副次標本	複合標本
標本村落数	476	478	954
標本世帯数	702	711	1,413

(出所) Mahalanobis, Prasanth Chandra, "A Method of Fractile Graphical Analysis," *Econometrica*, Vol. 28, 1960, p.330.

付表1(b) 世帯員1人あたり消費支出総額(30日間)[その2]  
 — インド全国標本調査第9次調査(全国・郡部, 1955年5月~11月) —

系列 番号	等区分 グループ (%)	消費支出総額(30日間1人あたり) (ルピー)					
		グループの上限值			グループの平均値		
		第1副次標本	第2副次標本	複合標本	第1副次標本	第2副次標本	複合標本
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	1	3.19	2.98	3.16	2.99	2.58	2.71
2	2	3.91	3.71	3.87	3.67	3.43	3.52
3	3	4.28	4.16	4.20	4.13	4.01	4.06
4	4	4.65	4.56	4.65	4.51	4.39	4.46
5	5	4.91	4.79	4.90	4.85	4.72	4.78
6	0-5	4.91	4.79	4.90	4.01	3.82	3.90
7	5-10	5.99	5.85	5.92	5.43	5.39	5.39
8	10-15	6.74	6.88	6.80	6.39	6.38	6.38
9	15-20	7.54	7.90	7.76	7.25	7.35	7.28
10	20-25	8.52	8.59	8.56	8.05	8.31	8.20
11	25-30	9.36	9.57	9.53	8.96	9.19	9.06
12	30-35	10.17	10.39	10.31	9.80	9.95	9.89
13	35-40	11.03	11.09	11.07	10.66	10.74	10.69
14	40-45	11.80	12.06	11.92	11.42	11.68	11.49
15	45-50	12.83	13.02	12.88	12.35	12.59	12.43
16	50-55	14.14	14.05	14.14	13.46	13.45	13.44
17	55-60	15.13	15.55	15.24	14.57	14.73	14.64
18	60-65	16.61	16.97	16.77	15.81	16.12	16.00
19	65-70	18.49	18.59	18.56	17.61	17.88	17.78
20	70-75	19.85	20.08	20.02	19.14	19.37	19.26
21	75-80	22.59	22.01	22.11	21.22	21.27	21.19
22	80-85	24.95	23.60	24.35	23.77	22.97	23.36
23	85-90	29.57	27.53	28.59	27.40	25.42	26.23
24	90-95	38.05	38.38	38.13	32.85	32.06	32.17
25	95-100	194.41	128.86	194.41	55.96	53.30	54.31
26	96	43.45	40.74	40.77	40.34	39.83	39.35
27	97	47.41	44.16	46.30	45.60	42.94	44.01
28	98	58.18	57.16	57.16	56.06	49.80	52.11
29	99	66.86	67.69	66.86	65.34	72.22	62.86
30	100	194.41	128.86	194.41	96.54	66.65	78.88
31	0-20				5.64	5.72	5.67
32	20-40				9.39	9.56	9.46
33	40-60				13.01	13.15	13.06
34	60-80				18.33	18.82	18.58
35	80-100				32.90	33.15	32.99
36	0-25				6.06	6.26	6.16
37	25-50				10.61	10.77	10.68
38	50-75				16.04	16.27	16.12
39	75-100				30.53	30.45	30.43
40	0-50				8.31	8.48	8.39
41	50-100				22.65	23.10	22.85
42	0-100				15.03	15.24	15.15

原注：標本村落数は772(うち4つは非居住), また標本世帯数は, いずれの副次標本でも768であった。  
 (出所) 付表1(a)に同じ(p.331)。

付表 2(a) 世帯員 1 人あたり穀類消費支出 (30 日間) [その 1]  
 — インド全国標本調査第 7 次調査 (全国・郡部, 1953 年 10 月～1954 年 3 月) —

系列 番号	等区分 グループ (%)	穀類消費支出 (1 人あたり平均) (ルピー)			消費支出総額にしめる穀類消費支出の割合		
		第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本	第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	1.09	2.83	2.16	0.436	0.588	0.572
2	2	2.32	2.75	2.13	0.751	0.704	0.679
3	3	2.26	2.57	2.74	0.656	0.550	0.656
4	4	3.12	2.66	2.71	0.639	0.624	0.576
5	5	3.70	3.22	3.39	0.632	0.622	0.610
6	0- 5	2.49	2.79	2.61	0.635	0.614	0.620
7	5- 10	4.07	4.20	4.20	0.600	0.664	0.648
8	10- 15	5.07	4.44	4.70	0.616	0.554	0.573
9	15- 20	4.99	5.28	5.11	0.562	0.584	0.576
10	20- 25	5.71	4.66	5.17	0.572	0.535	0.550
11	25- 30	5.56	5.39	5.53	0.560	0.560	0.562
12	30- 35	5.59	5.57	5.98	0.515	0.557	0.541
13	35- 40	6.00	6.73	6.28	0.499	0.552	0.534
14	40- 45	6.75	7.29	6.82	0.487	0.546	0.492
15	45- 50	8.15	6.60	7.46	0.510	0.490	0.503
16	50- 55	7.38	6.83	7.21	0.481	0.475	0.491
17	55- 60	7.67	7.84	7.78	0.492	0.516	0.489
18	60- 65	7.31	8.49	7.85	0.398	0.464	0.444
19	65- 70	8.95	7.65	8.23	0.446	0.417	0.425
20	70- 75	8.22	9.27	8.74	0.423	0.456	0.440
21	75- 80	9.44	8.93	9.24	0.388	0.396	0.398
22	80- 85	8.69	8.69	8.59	0.358	0.382	0.366
23	85- 90	9.30	8.53	8.96	0.324	0.333	0.331
24	90- 95	10.13	8.18	9.29	0.292	0.238	0.272
25	95-100	12.02	12.19	11.78	0.214	0.234	0.219
26	96	13.18	13.09	10.38	0.303	0.322	0.261
27	97	13.72	12.76	15.01	0.253	0.277	0.275
28	98	13.29	12.04	11.51	0.233	0.222	0.222
29	99	10.68	10.06	11.74	0.139	0.189	0.185
30	100	9.27	13.21	10.38	0.081	0.161	0.102
31	0- 20	4.19	4.13	4.17	0.601	0.603	0.602
32	20- 40	5.72	5.70	5.77	0.534	0.552	0.547
33	40- 60	7.54	7.16	7.30	0.492	0.506	0.494
34	60- 80	8.40	8.59	8.49	0.412	0.432	0.426
35	80-100	9.87	9.25	9.54	0.296	0.295	0.296
36	0- 25	4.49	4.24	4.36	0.615	0.597	0.607
37	25- 50	6.51	6.47	6.46	0.524	0.551	0.536
38	50- 75	7.85	8.02	7.94	0.432	0.460	0.446
39	75-100	9.79	9.18	9.48	0.268	0.274	0.272
40	0- 50	5.51	5.43	5.46	0.558	0.567	0.561
41	50-100	8.74	8.58	8.67	0.329	0.341	0.335
42	0-100	7.01	6.90	6.96	0.398	0.410	0.404

	第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本
標本村落数	476	478	954
標本世帯数	702	711	1,413

(出所) 付表 1(a)に同じ (p.335)。

付表2(b) 世帯員1人あたり穀類消費支出(30日間)[その2]  
 — インド全国標本調査第9次調査(全国・郡部, 1955年5月~11月) —

系列 番号	等区分 グループ (%)	穀類消費支出(1人あたり平均)(ルピー)			消費支出総額に占める穀類消費支出の割合		
		第1副次標本	第2副次標本	複合標本	第1副次標本	第2副次標本	複合標本
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	1.72	1.65	1.66	0.581	0.654	0.638
2	2	1.66	1.86	1.87	0.463	0.567	0.532
3	3	2.46	2.36	2.34	0.597	0.604	0.594
4	4	2.48	3.19	2.89	0.556	0.675	0.602
5	5	3.52	3.17	3.25	0.686	0.672	0.657
6	0-5	2.34	2.49	2.39	0.571	0.634	0.603
7	5-10	3.01	3.14	3.09	0.557	0.581	0.568
8	10-15	3.43	3.54	3.48	0.550	0.550	0.554
9	15-20	3.42	3.88	3.60	0.511	0.541	0.524
10	20-25	4.46	4.37	4.50	0.554	0.516	0.539
11	25-30	4.28	4.50	4.39	0.509	0.502	0.500
12	30-35	5.11	5.06	5.05	0.525	0.485	0.509
13	35-40	5.44	5.43	5.34	0.522	0.528	0.517
14	40-45	5.18	6.02	5.61	0.469	0.500	0.493
15	45-50	6.25	5.70	6.00	0.495	0.484	0.488
16	50-55	5.45	6.09	5.80	0.418	0.456	0.434
17	55-60	7.05	5.99	6.56	0.477	0.417	0.456
18	60-65	6.29	6.09	6.30	0.428	0.423	0.427
19	65-70	5.68	7.03	6.18	0.343	0.391	0.355
20	70-75	7.15	7.23	7.19	0.389	0.374	0.383
21	75-80	7.41	7.61	7.50	0.354	0.360	0.356
22	80-85	7.82	8.49	8.05	0.332	0.378	0.354
23	85-90	8.36	8.09	8.21	0.299	0.330	0.316
24	90-95	9.66	7.21	8.50	0.289	0.290	0.288
25	95-100	10.51	8.97	9.50	0.189	0.193	0.190
26	96	7.96	9.81	9.01	0.225	0.254	0.235
27	97	11.06	6.73	8.68	0.246	0.162	0.222
28	98	9.64	8.72	7.31	0.173	0.217	0.165
29	99	12.01	10.75	11.65	0.165	0.201	0.183
30	100	13.98	9.86	11.52	0.142	0.114	0.140
31	0-20	3.00	3.26	3.11	0.548	0.576	0.562
32	20-40	4.81	4.85	4.81	0.528	0.506	0.516
33	40-60	6.03	5.95	6.01	0.465	0.463	0.467
34	60-80	6.56	7.04	6.79	0.379	0.385	0.380
35	80-100	8.92	8.12	8.52	0.277	0.294	0.286
36	0-25	3.25	3.49	3.38	0.537	0.557	0.549
37	25-50	5.24	5.32	5.26	0.494	0.494	0.493
38	50-75	6.30	6.49	6.39	0.393	0.399	0.396
39	75-100	8.61	8.00	8.30	0.282	0.263	0.273
40	0-50	4.24	4.39	4.31	0.510	0.517	0.514
41	50-100	7.35	7.22	7.29	0.325	0.312	0.319
42	0-100	5.70	5.71	5.70	0.379	0.373	0.376

原注：標本村落数は772(うち4つは非居住), また標本世帯数は, いずれの副次標本でも768であった。  
 (出所) 付表1(a)に同じ(p.336)。



付表 3(a) 消費支出総額と穀類消費支出の累積百分率 [その 1]  
 — インド全国標本調査第 7 次調査 (1953 年 10 月～1954 年 3 月, 全国・郡部) —

系列 番号	等区分 グループ (%)	消費支出の累積百分率			穀類消費支出の累積百分率		
		第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本	第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	0.14	0.14	0.13	0.15	0.45	0.31
2	2	0.26	0.36	0.31	0.40	0.85	0.61
3	3	0.50	0.67	0.55	0.79	1.28	1.01
4	4	0.81	0.93	0.86	1.31	1.62	1.45
5	0- 5	1.07	1.18	1.11	1.79	2.01	1.86
6	5- 10	3.09	3.13	3.00	4.90	5.20	4.93
7	10- 15	5.88	5.59	5.54	9.50	8.76	8.85
8	15- 20	8.22	7.64	8.01	12.84	11.87	12.47
9	20- 25	11.05	10.62	10.71	17.07	15.45	16.10
10	25- 30	13.91	13.07	13.35	20.99	18.71	19.70
11	30- 35	17.36	16.22	17.44	25.31	22.70	25.23
12	35- 40	21.02	21.19	21.05	29.75	29.83	29.93
13	40- 45	24.88	26.88	25.68	34.65	37.92	36.02
14	45- 50	30.26	30.71	30.47	42.38	42.46	42.34
15	50- 55	34.76	34.93	34.69	47.81	47.21	47.35
16	55- 60	39.83	39.31	39.53	53.61	52.48	53.05
17	60- 65	45.91	44.11	44.64	59.71	58.22	58.63
18	65- 70	51.22	49.45	50.50	65.69	63.58	64.86
19	70- 75	56.11	55.46	55.75	70.41	70.19	70.23
20	75- 80	61.79	62.33	61.98	76.18	76.71	76.39
21	80- 85	69.75	70.00	69.99	82.71	82.92	82.84
22	85- 90	76.52	77.31	76.94	87.96	88.04	87.99
23	90- 95	85.45	87.26	85.84	94.08	93.58	93.65
24	96	87.04	88.19	88.19	95.21	94.29	95.03
25	97	89.37	92.14	90.29	96.74	96.99	96.67
26	98	92.25	94.44	92.64	98.18	98.31	97.91
27	99	93.87	96.83	95.08	98.75	99.28	98.97
28	100	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

	第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本
標本村落数	476	478	954
標本世帯数	702	711	1,413

(出所) 付表 1(a)に同じ (p.340)。

付表3(b) 消費支出総額と穀類消費支出の累積百分率 [その2]  
 — インド全国標本調査第9次調査 (1955年5月～11月, 全国・郡部) —

系列 番号	等区分 グループ (%)	消費支出の累積百分率			穀類消費支出の累積百分率		
		第1副次標本	第2副次標本	複合標本	第1副次標本	第2副次標本	複合標本
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	0.25	0.32	0.19	0.37	0.38	0.32
2	2	0.65	0.38	0.49	0.86	0.62	0.74
3	3	0.88	0.68	0.80	1.22	1.08	1.21
4	4	1.25	1.11	1.17	1.75	1.91	1.85
5	0- 5	1.69	1.39	1.50	2.59	2.43	2.44
6	5- 10	3.88	3.25	3.54	5.80	5.33	5.54
7	10- 15	5.91	5.37	5.62	8.68	8.48	8.55
8	15- 20	8.32	8.03	8.13	11.67	12.24	11.85
9	20- 25	10.81	11.06	10.97	15.31	16.51	16.00
10	25- 30	14.36	14.33	14.34	19.79	20.80	20.34
11	30- 35	17.39	17.95	17.71	23.96	25.73	24.92
12	35- 40	21.29	21.95	21.48	29.22	31.15	29.92
13	40- 45	24.80	25.58	24.97	33.42	36.16	34.45
14	45- 50	29.36	29.62	29.38	39.51	41.07	40.12
15	50- 55	33.90	34.23	34.03	44.36	46.66	45.45
16	55- 60	39.30	39.14	39.30	51.26	52.01	51.73
17	60- 65	44.29	43.48	44.04	56.50	56.40	56.69
18	65- 70	51.02	48.75	49.97	62.22	61.96	62.17
19	70- 75	56.55	55.30	55.76	67.67	68.51	67.92
20	75- 80	62.69	62.40	62.45	73.32	75.32	74.22
21	80- 85	70.40	67.71	69.12	80.01	80.58	80.33
22	85- 90	79.09	75.85	76.74	87.00	87.52	86.66
23	90- 95	88.53	86.29	87.31	94.32	93.82	94.09
24	96	90.55	87.79	88.87	95.37	94.81	95.04
25	97	92.39	90.18	91.44	96.55	95.82	96.39
26	98	94.71	93.98	94.06	97.60	97.60	97.37
27	99	98.44	96.34	97.16	99.41	98.71	98.90
28	100	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

原注：標本村落数は772（うち4つは非居住），また標本世帯数は，いずれの副次標本でも768であった。  
 (出所) 付表1(a)に同じ (p.341)。

付表4(a) 土地所有面積の分布 [その1]  
 — インド全国標本調査第8次調査 (ウエスト・ベンガル州・郡部, 1954年7月~1955年4月) —

等区分 グループ (%)	土地所有面積の上限 (エーカー)			土地所有面積の累積百分率			土地所有面積の1世帯あたりの平均 (エーカー)		
	第1副次標本	第2副次標本	複合標本	第1副次標本	第2副次標本	複合標本	第1副次標本	第2副次標本	複合標本
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0-15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
15-20	0.00	0.04	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.02	0.00
20-25	0.00	0.06	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00	0.05	0.00
25-30	0.00	0.17	0.04	0.00	0.30	0.06	0.00	0.09	0.03
30-35	0.04	0.37	0.08	0.03	0.74	0.19	0.01	0.25	0.06
35-40	0.08	0.60	0.17	0.17	1.62	0.46	0.06	0.51	0.12
40-45	0.15	0.89	0.36	0.43	2.95	1.03	0.11	0.76	0.27
45-50	0.32	1.19	0.66	0.94	4.73	2.13	0.21	1.02	0.51
50-55	0.52	1.52	1.00	1.91	7.04	3.94	0.39	1.32	0.84
55-60	0.95	2.00	1.36	3.70	10.12	6.47	0.72	1.76	1.18
60-65	1.33	2.40	1.86	6.49	13.92	9.88	1.13	2.18	1.59
65-70	1.84	2.85	2.30	10.32	18.49	14.33	1.55	2.61	2.07(b)
70-75	2.29	3.33	2.92	15.37	23.85	19.94	2.04	3.06	2.60
75-80	3.22	4.19	3.78	22.05	30.26	26.19	2.71	3.67	3.32
80-85	4.31	5.79	4.79	31.23	38.65	36.30	3.71	4.79	4.28
85-90	5.99	7.73	7.08	43.46	50.31	49.09	4.94	6.66	5.94
90-95	8.60	12.46	10.70	60.87	67.41	66.88	7.06	9.81	8.29
95-100	84.66	49.28	84.66	100.00	100.00	100.00	15.83	18.60	18.72
96	9.19	13.53	12.75	65.30	71.97	70.92	8.88	12.96	11.82(c)
97	10.27	15.15	14.64	70.04	76.98	75.73	9.66	14.22	13.74
98	14.91	16.64	16.64	76.29	82.54	81.20	12.71	15.80	15.64
99	20.05	21.90	21.82	84.73	88.94	87.99	16.90	18.63	18.76
100	84.66	49.28	84.66	100.00	100.00	100.00	31.07	31.41	32.84
0-20	0.00	0.04	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.01	0.00(a)
20-40	0.08	0.60	0.17	0.17	1.62	0.46	0.02	0.23	0.05
40-60	0.95	2.00	1.36	3.70	10.12	6.47	0.36	1.21	0.70
60-80	3.22	4.19	3.78	22.05	30.26	26.19	1.86	2.88	2.39
80-100	84.66	49.28	84.66	100.00	100.00	100.00	7.89	9.97	8.47
0-50	0.32	1.19	0.66	0.94	4.73	2.13	0.04	0.27	0.10
50-100	84.66	49.28	84.66	100.00	100.00	100.00	4.01	5.45	4.55
0-100	84.66	49.28	84.66	100.00	100.00	100.00	2.02	2.86	2.32

訳注：1. 1 エーカー = 4,046.8 m<sup>2</sup>。

2. (10)欄の(a)(b)(c)は図7の(a)(b)(c)に対応している。

	第1副次標本	第2副次標本	複合標本
標本村落数	18	18	36
標本世帯数	569	406	975

(出所) 付表1(a)に同じ (p.344)。

付表 4 (b) 土地所有面積の分布 (その 2)  
 — インド全国標本調査第 8 次調査 (アンドラ州・郡部, 1954 年 7 月~1955 年 4 月) —

等区分 グループ (%)	土地所有面積の上限 (エーカー)			土地所有面積の累積百分率			土地所有面積の 1 世帯あたりの平均 (エーカー)		
	第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本	第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本	第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0-15	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00
15-20	0.01	0.01	0.01	0.00	0.02	0.01	0.00	0.01	0.01
20-25	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.02	0.01	0.01	0.01
25-30	0.02	0.02	0.02	0.03	0.05	0.04	0.02	0.02	0.02
30-35	0.04	0.05	0.04	0.07	0.09	0.08	0.03	0.03	0.03
35-40	0.26	0.09	0.10	0.15	0.15	0.15	0.07	0.05	0.06
40-45	0.52	0.42	0.51	0.73	0.41	0.59	0.45	0.23	0.35
45-50	0.95	0.61	0.78	1.57	1.00	1.31	0.65	0.51	0.59
50-55	1.52	1.01	1.02	2.95	2.02	2.48	1.07	0.89	0.96
55-60	2.10	1.40	1.68	5.27	3.29	4.27	1.81	1.11	1.37
60-65	3.02	1.80	2.32	8.49	5.12	6.55	2.50	1.58	1.95
65-70	3.87	2.50	3.02	12.74	7.53	9.85	3.31	2.10	2.70 (b)
70-75	4.74	3.01	4.02	18.21	10.76	14.06	4.26	2.80	3.42
75-80	5.77	4.61	5.39	24.95	15.02	19.86	5.25	3.69	4.74
80-85	8.09	6.34	7.05	33.66	21.50	27.33	6.78	5.64	6.11
85-90	10.72	9.41	9.86	45.39	30.54	37.51	9.14	7.83	8.32
90-95	15.34	15.42	15.34	61.35	43.96	52.36	12.42	11.69	12.07
95-100	324.52	345.52	345.52	100.00	100.00	100.00	30.10	48.55	38.93
96	17.08	18.69	17.31	65.62	47.87	56.30	16.46	16.62	16.34 (c)
97	19.03	25.82	21.04	70.45	52.90	61.00	18.16	21.88	19.04
98	22.98	35.64	28.18	75.65	59.94	66.98	20.96	30.65	24.20
99	31.56	50.17	42.57	82.52	70.13	75.15	27.13	44.39	33.87
100	324.52	345.52	345.52	100.00	100.00	100.00	67.42	130.03	100.54
0-20	0.01	0.01	0.01	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00 (a)
20-40	0.26	0.09	0.10	0.15	0.15	0.15	0.03	0.03	0.03
40-60	2.10	1.40	1.68	5.27	3.29	4.27	0.99	0.68	0.82
60-80	5.77	4.61	5.39	24.95	15.02	19.86	3.83	2.54	3.20
80-100	324.52	345.52	345.52	100.00	100.00	100.00	14.61	18.45	16.35
0-50	0.95	0.61	0.78	1.57	1.00	1.31	0.12	0.09	0.11
50-100	324.52	345.52	345.52	100.00	100.00	100.00	7.66	8.60	8.05
0-100	324.52	345.52	345.52	100.00	100.00	100.00	3.89	4.34	4.08

訳注： 1. 1 エーカー ≒ 4,046.8 m<sup>2</sup>。  
 2. (10)欄の(a)(b)(c)は図 7 の(a)(b)(c)に対応している。

	第 1 副次標本	第 2 副次標本	複合標本
標本村落数	18	18	36
標本世帯数	343	360	703

(出所) 付表 1 (a)に同じ (p.345)。

[付記] 本稿の執筆にあたっては日本学術振興会から研究助成 (2002 [平成 14] 年度~2004 [平成 16] 年度) を受けている (機関番号: 30107, 研究種目: 基盤(B)2, 課題番号: 14402031, 研究代表者: 池田均北海学園大学経済学部教授)。