《論説》

ネイマンの標本調査理論とその周辺（上）

木　村　和　範

もくじ

はじめに

一部調査の結果から全体数字をもとめる統計調査を標本調査と言う。その代表的な手法として任意抽出法が広く利用されるようになって久しい。標本調査が普及する過程については先行研究によって次のことが明らかになっている。すなわち，標本調査の有効性をめぐる論議は，1895 年国際統計協会（以下 ISI と略記）ベルン大会における A.N. キエール（ノルウェー）の問題提起に始まった[1]。その後，1925 年 ISI ローマ大会で A. イェンセン（デンマーク）がそれまでの議論を整理して，報告書を提出した[2]。このイェンセン・レポートは，代表法という名称の一部調査法を統計調査の一形態として認定した。それとともに，代表法には有意選出法と任意抽出法の 2 つがあり，いずれもが甲乙つけがたい有用な統計調査法であるとも規定した。

2 つの代表法の間の「均衡関係」を破ったのが 1934 年に『王立統計協会雑誌』に公表された J. ネイマンの論文（以下，1934 年論文と略記）である[3]。1937 年にネイマンはアメリカに招かれて，農務省大学院で講義（以下，1937 年講義と略記）を行った。この講義は出席した統計学者の支持を得て，ネイマンのその後のアメリカにおける学究生活の端緒を作ることになった。このときの講義録は W.E. デミングの協力のもとに一書にまとめ

（1）Kiaer, A.N., “Observation et expériment concernant des dénombrements représentatifs,” *Bulletin of the International Statistical Institute (BISI)*, Vol.9, 1985-86.

（2）Jensen, A., “Report on the Representative Method in Statistics,” *BISI*, Vol.22, No.1, 1926.

（3）Neyman, J., “On the Two Different Aspects of the Representative Method: the Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selection,” *JRSS*, Vol.97, 1934.［以下 Neyman（1934）と略記。］

られて，その年の内に公刊された[4]。S.S. ウィルクスはこの講義録に好意的な書評を執筆した。この書評は，アメリカ統計学会の機関誌に掲載されたこともあって，ネイマン理論のアメリカへの紹介と普及に役割を果たした[5]。

拙著『標本調査法の生成と展開』（北海道大学図書刊行会，2001 年 11 月刊）では，上記のキエール，イェンセン，ネイマンの 3 人を点に見立てて，部分から全体への「一般化」を目的とする標本調査理論がどのようにして形成されたかを解明しようと試みた。それとともに，そのときどきの理論を生み出した社会的背景を明らかにしようとも試みた。この検討の結果は，（上）・（下）に分けた本稿（下）の末尾に掲載した略年表（付表）と系譜（付図）に要約されるが，本稿は，拙著で論ずることができなかったいくつかの論点を取り上げて，その欠けたところを少しでも補うべく企図された。その際，本稿では，ネイマンの標本調査理論を「終着駅」に見立てて，その理論を生み出すにいたった社会的背景を解明するとともに，彼の先行研究者による理論的蓄積を回顧して，ネイマン理論がいかにして準備されたかを検討することに主たる目的をおくことにした。そして，キエールからイェンセンを経てネイマンにいたる標本調査法の理論的展開過程をその基底において方向づけたいくつかのトピックスを取り上げて，ネイマンの標本調査理論の歴史制約性ないし社会性について考察してみたいと考えている。本稿でとりあげるこのような論点は拙著の課題でもあったために，拙著ですでに述べられた事柄が本稿でも重ねて叙述されている。しかし，本稿では，(1)ジーニの集中比，(2)ネイマン理論がアメリカで受容されたときの社会的背景としての 1936 年大統領選挙，(3)統計的推論の普及にあたって統計調査の分野が医学・薬学，農業，工業の分野にくらべて若干ではあるが遅れたことについての指摘が新たに付け加えられている。

以下，本稿における叙述の順序は次のとおりである。

1．ネイマンの標本調査理論　では，1934 年論文と 1937 年講義にそくしてその理論の特徴について述べる。

2．ネイマン理論の先行研究　では，標本調査の分野に限定して，ネイマンの理論が公表される直前における統計学界の動向について述べる。

3．統計調査以外の分野における 1920 年代〜1930 年代の理論状況と社会的背景　では，この時期に，統計的推論がさまざまな分野で応用されたことを述べる。そして，標本調査理論だけでなくそれ以外にもネイマンの統計理論が受容される素地が社会的規模で形成されていたことを述べる。

なお，上記 1．は（上）として本号に掲載し，2．以降は（下）として次号に掲載する。

1．ネイマンの標本調査理論

部分から全体への「一般化」が正しく行われるためには，①正確な基礎数字と②部分と全体をつなぐ関係の把握が必要である[6]。このことから言えば，ネイマンが 1934 年論文や 1937 年講義で明らかにしたのは，上の 2

（4）ditto, “On Statistical Method in Social and Economic Research: Census by Sampling and Other Problems,” in his *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics*, the Graduate School of the U.S. Department of Agriculture, Washington, 1937.［以下 Neyman（1937）と略記。］

（5）Wilks, S.S., “Book Review of *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics* by J. Neyman,” *JASA*, Vol.33, 1928.

（6）蜷川虎三『統計学概論』岩波書店，1934 年，96 頁以下参照。

つの要件うちの②部分と全体とをつなぐ関係にかんする数学的な定式化である。これにたいして，①基礎数字の獲得については，ネイマンはティペットの乱数表（1927年）[7]（以下，ティペット表と略記）によって達成されると考えている[8]。したがって，ここではネイマンが，部分と全体をどのようにして関係づけたか，また関係づけうると予想したかについて述べる。

(1)　ネイマンの課題

ネイマンが1934年論文（および1937年講義における標本調査にかんする考察）のなかでとりあげた課題を明確にするために，その論文（と講義）が公けになる直前の状況について簡単に触れておきたい。

第1は，1925年ISIローマ大会に提出されたイェンセン・レポートの付帯論文（刊行は1926年）[9]のなかでボーレーが部分と全体との間の数学的関係を①大標本理論と②逆確率（ベイズの定理）の2つによって定式化し，さらに③推定の精度を向上させる方策として層別比例抽出の考え方を提示していたということである。

第2は，1925年イェンセン・レポートが有意選出法の適用をも推奨していたために，そのレポートの公刊以降も有意選出法を擁護する論文が公表されたり，あるいは有意選出法によって代表標本を得ようとしたりする試みがなされていたということである。たとえば，1927年にはISIカイロ大会でC. ジーニが有意選出法の優秀性について報告し[10]，その翌年の1928年には有意選出法を擁護するイェンセン論文が『王立統計協会雑誌』に掲載されている[11]。

このようななかにあって，1934年論文（と1937年講義）におけるネイマンの課題は，一方でボーレーを批判的に継承し，他方でジーニに代表される「有意選出学派」を批判することであった。

(2)　小標本理論の継承

これらのことを確認したうえで，以下ではネイマンの1934年論文および1937年講義の内容を簡単に要約する。まず，最初に，ボーレー理論の批判的継承について述べる。その第1論点は，ボーレーの大標本理論についてである。パラメータの真値を θ，その推定量を θ' とするとき，θ' が

①$E(\theta')=\theta$

②$\sigma_{\theta'}{}^2=E(\theta'-\theta)^2\to\min$

という2つの数学的性質をもち，しかも，その推定量 θ' が大きさ n の標本を構成する要素（$x_1,\cdots\cdots,x_n$）にかんする線形結合で表現できる場合，すなわち，推定量 θ' が積和によって

$$\theta'=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots\cdots+\lambda_nx_n+\lambda_0\quad\cdots\cdots(1)$$

と表現できる場合，ネイマンは，そのような推定量をマルコフにならって「最良線形推定量」と呼び，それをもって望ましい推定量と考えた[12]。

母平均を推定する場合をとりあげて，このことを考察したい。母平均の推定の基礎数字をあたえる標本統計量は，一般に，相加平均

（7）Tippett, L.H.C., *Random Sampling Numbers*, Tracts for Computer, No.XV, ed. by E.S. Pearson, Cambridge, 1927.
（8）Neyman（1937）, p.100.
（9）Bowley, A.L., “The Precision attained in Sampling,” *BISI*, Vol.22, 1926.
（10）Gini, C., “Une application de la mēthode repērsentative aux matēriaux du dernier recensement de la population italienne (1er dēcembre 1921),” *BISI*, Vol.23, No.2, 1929.［以下，Gini（1929）と略記。］
（11）Jensen, A., “Purposive Selection,” *JRSS*, Vol.91, 1928.
（12）Neyman（1934）, pp.563f.

(いわゆる標本平均)であるが，標本平均は下に述べる理由から「最良線形推定量」と考えることができる。ここで，標本平均を一般に $\bar{x}$ で表すと

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

である。(2)式は，(1)式において

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$$

であり，かつ

$$\lambda_0=0$$

の場合である。したがって，(2)式は(1)式の特別な場合であると考えることができ，$\bar{x}$ は(1)式のような積和で表現することができる。しかもそれだけでなく，標本平均 $\bar{x}$ は，上に示した 2 つの数学的性質（①$E(\theta')=\theta$ と②$\sigma_{\theta'}{}^2=E(\theta'-\theta)^2 \rightarrow \min$）を満たしている。かくして，標本平均 $\bar{x}$ は(1)式に示すような線形結合の形式で表現可能であり，かつ $\bar{x}$ の分布は望ましい推定特性をもつことになって，$\bar{x}$ はマルコフの「最良線形推定量」であると言うことができる。

ところが，たとえば，母分散の推定にとって望ましいとされる不偏標本分散は線形結合で表現することはできない(13)。このためであろうか，1937 年講義の講義録が 1952 年に改訂されたときには，ネイマンは，マルコフの「最良線形推定」に言及することなく，望ましい推定特性としては不偏性（unbiasedness）が重く見られるようになった。

不偏性を重視するネイマンの姿勢は，後にフィッシャーとの理論的対立が明確になるにつれて際立つようになった。ネイマンは，フィッシャーの最尤推定量に対峙させて不偏推定量（unbiased estimator）を推奨し，「最良線形推定量」がもつべきとされる推定特性の 1 つである不偏性に重きをおいた。そして，不偏性をもって望ましい推定特性と見なし，線形結合に言及することはなくなったのである。こうして，「最良線形推定量」の考え方は，不偏性に優れた推定値を望ましいとする点推定論として形を整えて，フィッシャーの最尤推定と相対するようになったが，そのときにおいても，点推定論にはネイマンはあまり力点を置いていない。むしろ以下で述べる区間推定論が統計的仮説検定論とともに，議論の中心になったのである。

ここでは，ネイマンが「最良線形推定」の考え方を述べたときの主旨は，最小分散不偏推定の考え方に立てば，大標本によらなくても望ましい推定値を得ることができると主張することにあったと指摘するにとどめたい。この主張をつうじてネイマンは，大標本理論に替わる理論として小標本理論の優秀性を強調し，1934 年の王立統計協会における研究会では，ゴセットやフィッシャーなどの小標本理論の流れを正統に汲んでいることを印象づけたと言えるであろう。

(3) 逆確率による推論への批判

ボーレーは 1926 年論文のなかで，ベイズの定理を援用して区間推定の問題に解をあたえている(14)。これにたいして，ネイマンは

(13) ①$E(\theta')=\theta$ と②$\sigma_{\theta'}{}^2=E(\theta'-\theta)^2 \rightarrow \min$ という 2 つの推定特性をもつ推定量がつねに線形結合の形式で表現できるという意味で，マルコフのいわゆる最良線形推定量であると言えるかどうかについては，ネイマンは 1934 年論文でも 1937 年講義でも，検討してはいない。このように，証明抜きで理念ないし原則をテーゼとして掲げるやり方は，ネイマンにとっては珍しくない。たとえば，ネイマンは「一様最強力検定」が望ましいと主張している。母平均の t 検定では確かに「一様最強力検定」となる棄却域が存在しているが，どのような検定についてもつねに「一様最強力検定」が存在するとは限らないと言われている（北川敏男「推測論　a　総論」中山伊知郎編『統計学辞典（改訂版）』東洋経済新報社，1957 年，205 頁）。

1934 年論文だけでなく 1937 年講義においてもベイズの定理の応用が現実的でないと批判している。ネイマンが考察の対象としている推定の領域では，母集団はただ 1 つだけであって，したがって，それは存在の確率をもつものではない。このために，複数の母集団の各々についてそれが発現する確率として事前確率を想定するベイズの定理の応用が非現実的であるとネイマンは主張した。

ベイズの定理の応用へのこのような批判にあたってネイマンが依拠したのはフィッシャーである[15]。その批判は，ベイズの定理における事前確率に集中している。この事前確率については，ベイズによる定理の最初の定式化がその均等性を前提とするものであったために，以後の論者も事前確率の均等性を所与として，推論を組み立てていた。ラプラスはこの均等性を「不十分理由の原理」で基礎づけようとした。これにたいしてフィッシャーは「不十分理由の原理」にもとづく事前確率の均等性仮説を批判した。そして，それとともに，事前確率によってその存在の確率が規定される母集団というものがそもそも現実の統計的推論の適用場面に適合的なものであるかどうかを問題にした。このことはパラメータの推測が目的となった母集団の母集団というものが，現実に存在しているかどうかを問題にしたと言い換えることもできる。フィッシャーはそのような母集団の母集団が存在せず，またありもしない母集団の確率（事前確率）を主観的に均等であると想定する考え方を批判した。このような批判のスタンスは，ネイマンにも継承されている。

そして，1934 年論文では，今日，区間推定の手法で用いられるいくつかの基本概念（信頼限界，信頼係数，信頼帯など）によりながら，ベイズの定理からの脱却を試みている。そこで次にネイマンの区間推定について述べることにする。

(4) 区間推定論

区間推定論は 1934 年論文の「付録」のなかで展開されていることもあって，そこでの論述と先に述べた「最良線形推定量」との連関は明瞭ではない[16]。さしあたり，1934 年論文のなかで区間推定論が取り上げられたということの主旨については，次のように考えたい。従来は，区間推定の問題は①大標本理論によるか，②ベイズの定理によるかのいずれかによって，その解を導出されるべき性質の問題であると考えられていた。じじつ，ボーレーも区間推定の問題を上に記した 2 とおりの方法で取り扱っている。これにたいしてネイマンは，そのような 2 とおりの方法のいずれによることもなく，区間推定の問題にたいする解を見いだすことが可能であることを，一般的に論じた。そのことにネイマンの主張の主旨があったと考えられる。

では，1934 年論文のなかで述べられた区間推定論とはどのようなものであろうか。次に，このことについて考察してみる。区間推定にかんするネイマンの構想は，彼の独創で

(14) このことがあるためか，ボーレーをベイジアンに分類する論者もいる（Darnell, A., “A.L. Bowley, 1869-1957,” in: O’Brien, D.P. and Presley, J.R. (eds.), *Pioneers of Modern Economics in Britain*, London, 1981[井上琢智・上宮正一郎・八木紀一郎他訳『近代経済学の開拓者』昭和堂，1986 年，178 頁]）。しかし，ボーレーは大標本理論による推論様式についても言及しているので，そのような位置づけは行き過ぎであろう。

(15) Neyman (1934), p.562.

(16) ネイマンは，1937 年講義においては標本調査の文脈のなかで区間推定にも言及しているが，改訂版講義録（Neyman, *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability*, 2nd ed., revised and enlarged, Washington, 1952）では標本調査を論じた箇所には区間推定への言及がなく，区間推定論は独立して取扱われるようになっている。

はない。ネイマンは，ウィルソンにならってベイズの定理によらない区間推定を構想した[17]。このウィルソンは，1927 年にミロー論文（1923 年）[18] にその着想を得て，ベイズの定理を援用せずに母比率を区間推定した。その解き方は今日一般に見られる解法と異なるところはなく，そこでは，大標本を前提せずに，標本特性値から母比率が区間推定されている。このウィルソンの研究を下敷きにして，ネイマンの区間推定論が形成された[19]。後に，ネイマンの区間推定論は，特殊な仮説検定論として体系化されることになるが[20]，1934 年論文の段階では，区間推定のための若干の基本概念が一般論として提示されているにとどまっている。

ネイマンの区間推定の一般的形式とは次のようなものである。

$$P\{\theta_1(x')\leqq\theta\leqq\theta_2(x')\}=1-\alpha \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ここに，θ はパラメータの真値，$\theta_1(x')$ は下方信頼限界，$\theta_2(x')$ は上方信頼限界，$1-\alpha$ は信頼係数。

(3)式の信頼係数 $1-\alpha$ の解釈をめぐって後にネイマンとフィッシャーとの間で論争が起こることになるが，1934 年論文を執筆した頃はもとより，1937 年講義のときにも対立は当事者でさえ自覚してはいなかった。このことが幸いして，フィッシャーはネイマン理論を自説の延長線上にあると考えた。このために，1934 年論文をめぐる王立統計協会における議論も穏やかであった。

さて，(3)式のような形式による区間推定を一般的に述べたときに用いた諸概念のなかで，後に重要な役割を演じたのが「信頼帯（belt of confidence）」の概念である。以下では，叙述を簡単にする目的で母分散 σ^2 が既知のときに母平均 μ を大きさ n の標本によって区間推定する場合を取り上げて，ネイマンの信頼帯の考え方について述べることにしたい。

中心極限定理によれば，標本平均 $\bar{x}$ は正規分布［$N(\mu,\sigma^2)$］にしたがうので，次のようになる。

$$P\left(\mu-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\bar{x}\leqq\mu+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95\cdots(4)$$

このとき，ネイマンは，標本平均 $\bar{x}$ が確率 0.95 で分布すると規定する両方の端点（$\mu\pm1.96\,\sigma/\sqrt{n}$）で作られる範囲を「採択域（region of acceptance）」と名づけた。母分散 σ^2 と標本の大きさ n が既知の場合には，$\bar{x}$ の分布は未知の母平均 μ の値に応じて異なり，言うところの採択域も異なってしまう。たとえば，$\mu=\mu_1$ のとき(4)式は

$$P\left(\mu_1-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\bar{x}\leqq\mu_1+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95\cdots(4)'$$

となり，また $\mu=\mu_2$ のとき(4)式は

$$P\left(\mu_2-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\bar{x}\leqq\mu_2+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95\cdots(4)''$$

となる。ここに，$\mu_1<\mu_2$ とすれば，2 つの μ（μ_1 と μ_2）について図 1 を描くことができる。

---

(17) ネイマンは，ウィルソンの理論（Wilson, E. B., “Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference,” *JASA*, Vol.22, 1927.）が彼自身の区間推定論に直接先行する業績であると明言している。cf. Neyman（1937), footnote in p.157.

(18) Millot, S., “Sur la probabilité a posteriori,” *Comptes rendus hebdromadaires des Séances de l'Academie des Science*, Paris, Vol.176, 1923. なお，この論文では大標本理論にもとづいて区間推定が取り扱われている。

(19) Neyman, J., “Outline of a Theory of Statistical Estimation based on the Classical Theory of Probability,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Ser. A., Vol.236, 1937. さらに，このネイマン理論がワルト（Wald, A., “Sequential Tests of Statistical Hypothesis,” *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.16, 1945）によって，3 つ以上の仮説を前提とする検定論へと拡張されることになった。

(20) 木村和範「ネイマンの推定論」同『統計的推論とその応用』梓出版社，1992 年，第 4 章，とくに 107 頁以下参照。

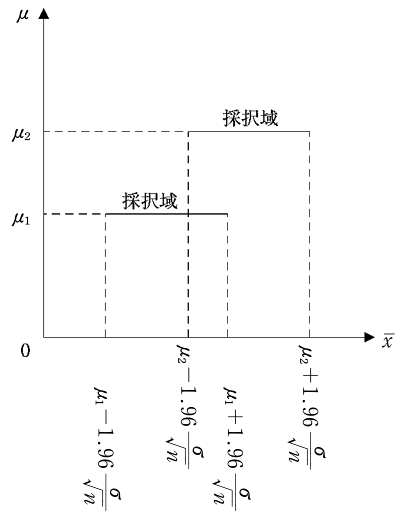

図1　さまざまな母平均 μ に対応する採択域

未知の母平均 μ はさまざまな値をとると考えることができるので，連続量とみなしてもよい。そうすれば，このときには採択域の端点を結ぶ直線が描かれて，結局は図2に示すような領域が形成される。可能なすべての採択域で構成される領域のことをネイマンは信頼帯と名づけた。

この信頼帯によって母平均を区間推定できるというのは，次のように考えればよい。

(4)式を変形して次式を誘導する。

$$P\left(\bar{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq\mu\leqq\bar{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95\cdots(5)$$

この(5)式は，標本平均 $\bar{x}$［既知］にもとづいて母平均 μ［未知］を区間推定するときによく見られる式であり，母平均の存在区間を予想する端点（$\bar{x}\pm1.96\,\sigma/\sqrt{n}$）が信頼限界（上方信頼限界と下方信頼限界）であることは，あえて言うまでもない。しかし，信頼帯を用いてこの(5)式の数理的意味を考察してみれば，ネイマンの区間推定論の特質を明らかにすることができる。図3は図2と形式的にも内容的にも同一であるが，図3を用いれば，標本抽出によって発現した標本平均 $\bar{x}$ の値が特定の値 $\bar{x}_0$ となったときに，(5)式の意味が別の角度から分かるようになる。図3は，標本平均 $\bar{x}$ の値が $\bar{x}_0$ のとき，母平均 μ が（信頼係数0.95で）$\mu_{0\cdot\mathrm{lower}}$ から $\mu_{0\cdot\mathrm{upper}}$ までの区間（すなわち信頼区間）に落ちると読むことができる。ここに，

$$\mu_{0\cdot\mathrm{lower}}=\bar{x}_0-1.96\,\sigma/\sqrt{n}$$
$$\mu_{0\cdot\mathrm{upper}}=\bar{x}_0+1.96\,\sigma/\sqrt{n}$$

であるから，(5)式は

$$P(\mu_{0\cdot\mathrm{lower}}\leqq\mu\leqq\mu_{0\cdot\mathrm{upper}})=0.95\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

となる。この(6)式は，母平均 μ が $\mu_{0\cdot\mathrm{lower}}$ から $\mu_{0\cdot\mathrm{upper}}$ までにあるという命題が正しい確率は0.95であることを意味する。そして，

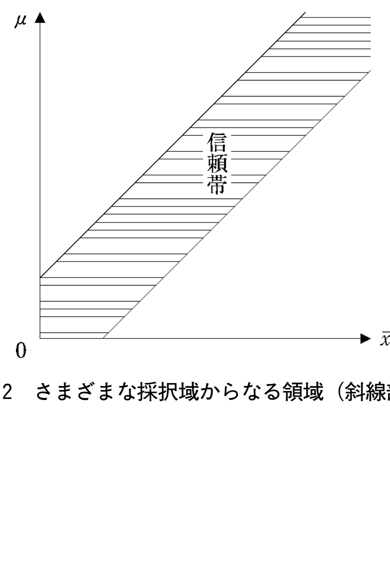

図2　さまざまな採択域からなる領域（斜線部）

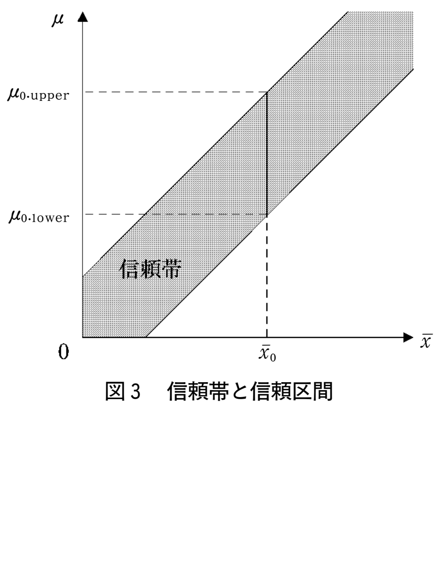

図3　信頼帯と信頼区間

ネイマンによれば，この(6)式は，母平均 μ がある値からある別の値までであるという複合仮説

$$H_0 : \mu_{0\cdot\mathrm{lower}} \leqq \mu \leqq \mu_{0\cdot\mathrm{upper}}$$

を確率 0.95 で採択したことと同じ意味であると考えられている。すでに，ネイマンの区間推定論が後に特殊な仮説検定論と言われるようになったと指摘しておいたが，それは以上のような事情による。

しかし，1934 年論文や 1937 年講義では区間推定論をもって特殊な仮説検定論としてその性格を規定することは行われておらず，区間推定論の基本的な諸概念が一般的に提示されているにすぎない。

さらにまた，すでにこの項の冒頭で述べたように，1934 年論文でも 1937 年講義でも区間推定論と「最良線形推定量」との関連が明らかにされてはいない。ただし，次のように考えれば，両者の関係の一端が明らかになる。すなわち，一方には，「最良線形推定量」がもつべきとされる数学的性質としての（最小分散）不偏性に優れた標本統計量（たとえば標本平均 $\bar{x}$）によってパラメータ（たとえば母平均 μ）を区間推定する場合をおく。他方には，確率（信頼係数）が同一（$1-\alpha$）ではあるものの（たとえば 0.95），それとは異なる別の標本統計量（たとえば最頻値［モード］とか中央値［メディアン］）を用いて同一のパラメータ μ を区間推定する場合をおく。そして，この両方の場合を比較する。そうすると，標本平均 $\bar{x}$ の分布の分散は，例示した他のいかなる標本特性値（モード，メディアン）の分布の分散よりも小さく，そのために，標本統計量 $\bar{x}$ によって作られる採択域は，他の標本特性値を採用したときのどの採択域よりも短くなると期待できる。この結果，そのような標本統計量にもとづく信頼帯を採用する場合には，それがあたえる信頼区間の距離もそれだけ短くなるはずである。すなわち，（最小分散）不偏性という数学的性質について優っている標本統計量を用いれば，最短信頼区間への途が開かれることになる。区間推定において信頼係数の大きさが同一であるときには，信頼区間の距離が短いほど好ましく，信頼区間は最短であることがもっとも望ましい。このように考えれば，区間推定の理論と「最良線形推定量」の考え方とは，標本統計量の不偏性を担保にして確保できると期待される信頼区間の最短性を媒介として結びつくことになる(21)。

以上述べたように，ネイマンの区間推定論は，とりわけ 1934 年論文ではその「付録」で取り上げられていることもあって，後に体系的に精緻化される考え方が予示されているにすぎない。ここでは，ネイマンの区間推定論の主張の主旨は，ベイズの定理を援用することなく区間推定が可能であることにあったと指摘するにとどめる。フィッシャーに依拠してこのように主張したことによってネイマンは，みずからフィッシャーの影響下にいる同系統の数理統計学者であると宣言したものと考えられる。ここで，先に述べた最小分散不偏推定の考えが小標本理論の拡充であることを思い起こしたい。①大標本理論と②ベイズの定理（逆確率による推論）はラプラス以来の伝統的な考え方であり，ボーレーでさえその枠内での考察にとどまっていた。ネイマンは，1934 年論文によってこの 2 つを批判し，さらに，次に述べるように独自の層別理論を加味して展開し，それが王立統計協会で受け入れられた(22)。

(21) しかしながら，両者は間接的に関連しているにすぎない。

(22) 後に「判断の確率」をめぐってネイマンはフィッシャーと鋭く対立することになるが，1934 年の時点ではそのような対立は少なくともネイマン以外には気づかれなかったように思われる。誰

⑸ 層別抽出

この論点は，ネイマンによるボーレー批判の第3論点である。ネイマンには，層別が推定の精度を向上させることについて異論がない。ところが，どの層についても抽出率を均等とする層別比例抽出にたいしては批判的である。それは，どの層もすべて分散が均一である場合には，層別比例抽出でも問題はないが，層ごとに分散が異なる場合は oversample と undersample の問題が生ずるからであるとネイマンは指摘している。分散が小さいにもかかわらず必要以上の大きさの標本を抽出することが oversample である。逆に分散が大きいにもかかわらず，小さな標本を抽出する場合には，undersample の問題が生ずる。このような問題があると想定される場合にも層別比例抽出によれば推定の精度が高まると主張し，これを数学的に定式化したのはボーレーである。ネイマンは層別比例抽出に付帯する上述の難点を克服する目的で，各層の分散をウェイトにして標本の大きさを割り当てる方式（「最適割当（optimal allocation）」）を提唱した。これは，後に「ネイマン割当（Neyman's allocation）」と言われた(23)。

の目から見ても対立が明確となったのは，1941年論文（Neyman, “Fiducial Argument and the Theory of Confidence Intervals,” *Biometrika*, Vol.32, 1941）であると考えられる。これ以降，区間推定論の分野だけでなく，両者の対立は仮説検定論でも鮮明になった。とくに仮説検定論の分野では，ネイマン＝統計的品質管理，フィッシャー＝農事試験を背景とする鋭い対立が見られる。しかし，両者の対立が明確になっていない時期にネイマンは王立統計協会で報告したこともあって，1934年論文はフィッシャーやイザーリス，ボーレーなど，当時のイギリスで著名な統計学者から肯定的な評価を受けることになった。

(23) この「割当（allocation）」は「割当法（quota method）」の「割当（quota）」とは異なる。「割当法（quota method）」は，1930年代のアメリカで世論調査の手法として使用された。この手法の有用性を世に知らしめたのはギャラップ社であり，それは，同社が1936年のアメリカ大統領選挙でこれによって，ルーズベルトの当選を的中させたからである（ギャラップ社の大統領選挙の予想については次を参照。Gallup, G. and Rae, S. F., *The Pulse of Democracy: the Public Opinion Poll and How it works*, New York, 1940［大江専一訳『米国の輿論診断』高山書院，1941年，46頁以下］。任意抽出法と割当法の比較検討については Gallup, G., *The Sophisticated Poll Watcher's Guide*, Princeton, 1972［二木宏二訳『ギャラップの世論調査入門』みき書房，1976年，63頁］を参照。また，岡田至雄『社会調査論』ミネルヴァ書房，1974年，27頁以下，大谷信介他編著『社会調査へのアプローチ』ミネルヴァ書房，1999年，107頁以下，も参照）。

渡部経彦は，「割当法」について次のように述べ，否定的な評価を下しているが，それは1948年アメリカ大統領選挙でギャラップ社の割当法による予想が外れたこと（本稿（下）の注73参照）を反映していると考えることができる。

「世論調査等の際に良く使われた1種の有意選出法である。標本調査の際には最終抽出単位まで無作為に抽出されることが必要条件であるが，この割当法では調査員が最終抽出単位を恣意的に選択するので，標本の無作為性は確保されない。即ち調査員はきまった地区，職業，年齢等の人々の内から何人かの標本を選択するように指示される。この割当てられた標本数は別に得られた母集団の特性値の構成割合に関する資料から得られるのである。標本数を割当てられた調査員は1軒1軒家を廻るとか，大体目安をつけてさがすかして与えられた数だけの標本を集めるのである。従ってここで無作為性は破られて有意的選択が入って来るので，この方法は望ましくないわけである。何故ならここに選ばれた標本には調査員の好みとか，調査の容易なもののみが選ばれるとか，都合の良い意見をもった人のみが選ばれるとか（これらは特に世論調査を何か政治的目的等に利用しようという場合には行われ易い）による偏倚が生じてくるからである。この方法が今まで用いられて来た原因としては無作為抽出するのにはリストが完全でないと出来ないので，このためリストを作る手間を省いて調査を簡単に（費用，時間等の意味で）しようとしたことにある。しかしこの方法が決して好ましいものではないことは上述の如くであるために昨今では余り用いられなくなった。」（『統計学辞典』［中山伊知郎編，東洋経済新報社1951年］ただし，引用は増補版［1957年］947頁による。引用にあたっては新字体を使用した。）

これまでに述べたようにネイマンは 3 点(大標本理論，逆確率による推論，層別比例抽出）に渡ってボーレーを批判して，小標本理論にもとづく標本調査の数理を展開した。すなわち，小標本理論によって部分と全体をつなぐ数学的関係を定式化したのである。後に残された課題は，有意選出法を批判することである。ネイマンは，1937 年講義でジーニ批判の立場を鮮明にして，有意選出法がいかに「悲惨な結末（disastrous results)」をもたらすか，それにたいして任意抽出法がいかに優れているかを論述した。このことについて次に述べることにする。

⑹　ジーニ批判

①　ジーニの見解

1921年12月 1 日現在で実施された人口センサスの(834 万 7,569 世帯分の)調査票が廃棄されることを知ったジーニは後日の活用のために，その調査票を保存する必要に迫られたが，保管場所の制約を受けて，そのうちの 15%の調査票を保存することにした。そのとき，ジーニは郡（circondarî）を単位にして，7 個の「操作特性値（caratteri strumentali)」と 2 個の「検査特性値(caratteri verificazione)」を対照標識(コントロール)とした。そして，標本として抽出される郡の地域分布を勘案して，適宜，郡を入れ替えて代表標本を構成した（図 4 参照)。

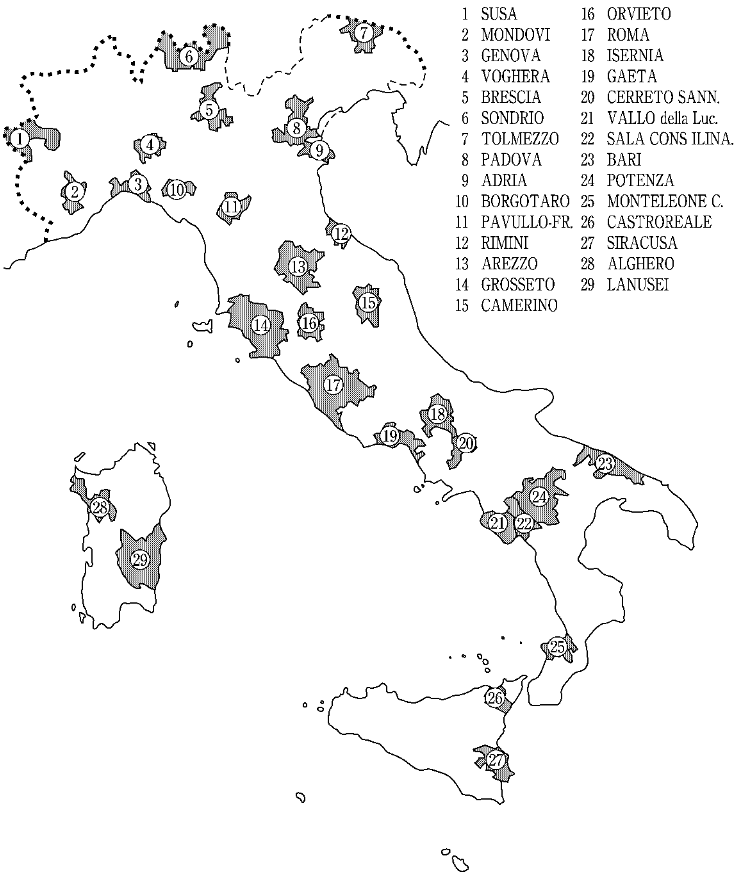

図 4　選出された郡の地域分布

（出所）Gini（1929), p.202; Gini e Galvani（1929), p.83. (Tav. 12. Circondarî scelti.)

ジーニは，この経験を 1927 年 ISI カイロ大会で報告[(24)]するとともに，1929 年には詳細なデータを含めてイタリアにおける代表法の適用について，ガルバーニと連名で『統計紀要』に公表した[(25)]。「操作特性値」と「検査特性値」による比較対照を行い，これをジーニが定めた標本の代表性にかんする判定尺度（表 1）にもとづいて検討してみると，標本は総じてよく全体と符合していることが分かった（表 2）。標本とセンサスとのこの対照を，いま試みに「第 1 次対照」と言うことにする。

表 2 が示すように第 1 次対照によって代表性の点で問題がないとされた標本の代表性をさらに検討する目的で，ジーニは「集中比（rapporte di concentrazione)」他によって標本とセンサス結果を比較してみた。集中比 R による比較を，ここで試みに「第 2 次対照」と言うことにする。以下，この第 2 次対照の結果がどのようなものであったかについて述べることにする。

ここに，第 2 次対照のときに使用された集中比 R と言われる尺度とは，いわゆるジー

表 1　相対的乖離の大きさと標本の評価

相対的乖離（%）	評　価
1.5 未満	非常に満足
1.5～ 5	満足
5～10	やや満足
10　超	満足でない

（出所）Gini（1929)，p.199 および Gini e Galvani（1929)，p.9 の叙述から作成。

表 2　全体と標本における特性値の比較

特性値（1～7：操作特性値　8～9：検査特性値）	全体（全イタリア 214 郡） A	標本（選出された 29 郡） E	絶対的乖離 $E-A$	相対的乖離 $\frac{E-A}{A}$	相対的乖離 $\frac{E-A}{A\frac{L-A}{L}}$ *
1．出生率	30.23‰	30.54‰	0.31‰	–	1.06%
2．死亡率	17.54‰	17.59‰	0.05‰	–	0.29%
3．婚姻率	10.45‰	10.34‰	−0.11‰	–	−1.06%
4．10 歳以上男性人口にしめる男性農業人口の割合	**47.36%**	**45.37%**	−1.99%	–	−7.98%
5．全人口にしめる人口集中地区居住者の割合	73.25%	74.69%	1.44%	–	7.35%
6．課税対象所得（勤労所得または雑所得：イタリア・リラ）	4,152.62	4,268.83	116.21	2.80%	–
7．都庁所在地の海抜標高（m）	171.35	170.49	−0.86	−0.50%	–
8．人口密度（1 km² あたり）	129.59	114.74	−14.85	−11.46%	–
9．人口の自然増（[1]−[2]）	12.70‰	12.95‰	0.25‰	–	1.99%

（注）1）強調は引用者。
2）＊L は出生率，死亡率，婚姻率，自然増については 1,000 であり，農業人口と集中地区人口については 100 である。
（出所）Gini e Galvani（1929)，p.81 (Tav. 10. Confronto fra le intensitã medie dei caratteri nell'insieme e nel campione); Gini（1929)，p.203. (Tableau I. Comparison entre les intensités moyennes des caractères dans l'ensemble et dans l'échantillon.)

（24）Gini（1929)．
（25）Gini, C. e Galvani, L., "Di una applicazione del metodo rappresentativo all'ultimo censimento italiano della popolazione (1° dicembre 1921)," *Annali di Statistica*, Serie VI, Vol. IV, 1929.［以下，Gini e Galvani（1929）と略記。］

ニ係数 G[補注] のことであって，以下に掲げる(7)式がその定義式である[(26)]。

$$R=\frac{\sum_{l=1}^{s}(i_{l-1}+i_l-1)f_l x_l}{(n-1)A_n}-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ただし，次のとおりとする。

x_l ：集団を構成する個体の数量的規定性（いわゆる変量の値）。その値は全部で s 個（種類）あって，$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_l, \cdots\cdots, x_s$ である。

f_l ：その値が x_l となる変量の個数。すなわち x_l の度数。

A_n：$f_1x_1+f_2x_2+\cdots\cdots+f_sx_s$

i_l ：x_l を昇順に並べたときに第 l 番目までにある変量の累積度数。すなわち，

$$i_l=f_1+f_2+\cdots\cdots+f_l$$

n ：全度数。すなわち，

$$n=f_1+f_2+\cdots\cdots+f_s$$

(7)式によってジーニはセンサス結果と代表標本について集中比 R を計算したが，その比較結果は表 3 のようになった。これを見れば，全体として標本の代表性には難点のあることが分かるが，他のどの特性値よりもとりわけ「10 歳以上男性人口にしめる男性農業人口の割合」（第 4 操作特性値）の場合にセンサスと標本との食い違いが大きい（表 3 ）。

第 1 次対照では代表性の点でさほど問題はなかった（表 2 ）。しかし，第 2 次対照では，代表標本とは言い難い（表 3，図 5 ）。この矛盾を前にして，ジーニは次のように述べて

表 3　全体と標本にかんする集中比 R の比較

特　性　値 （1 ～ 7 ：操作特性値 8 ～ 9 ：検査特性値）	全　体 (全国 214 郡) R_a	標　本 (被選出 29 郡) R_e	絶対的乖離 R_e-R_a	相対的乖離［%］ $\dfrac{R_e-R_a}{R_a\frac{100-R_a}{100}}$
1．出生率	12.2	11.4	−0.8	− 7.5
2．死亡率	8.55	7.84	−0.71	− 9.1
3．婚姻率	6.27	4.95	−1.32	−22.4
4．10 歳以上男性人口にしめる男性農業人口の割合	40.1	47.2	7.1	**29.7**
5．全人口にしめる人口集中地区居住者の割合	54.6	60.1	5.5	22.1
6．課税対象所得（勤労所得または雑所得：イタリア・リラ）	27.2	30.3	3.1	15.7
7．郡庁所在地の海抜標高（m）	59.0	65.0	6.0	24.8
8．人口密度（ 1 km² あたり）	39.2	43.0	3.8	16.0
9．人口の自然増[9)]	22.5	20.3	−2.2	−12.6

（注）強調は引用者。

（出所）Gini e Galvani（1929）, p.84. (Tav. 14. Comparazione tra i rapporti di concentrazione dei caratteri nell'insieme (R_a) e nel campione (R_e).)

（26）Gini e Galvani（1929）, p.15. なお，この共同論文のなかで集中比 R の典拠として揚げている論文は，Gini, C., “Sulla misura della concentrazione e delle variabilità dei carratteri,” *Atti del Reale Istituto di Scienze, Lettre ed Arti*, Tomo LXXIII, Parte II, 1913-14［以下，Gini（1913-14）と略記。］である。集中比 R［本文の(7)式］が初めて定式化されたのはこの論文においてであり，そのなかでは具体的な数値例にもとづく計算も例示されている（cf. pp.1209ff.)。ところが，Gini e Galvani（1929）, p.15 で引用されている集中比の算式には(7)式の第 2 項（－ 1 ）が記載されていない。これはミス・プリと思われる。

その解決を図った[27]。

「代表性の概念は絶対的ではなくて，相対的である。」

これはあらゆる面から見て，代表性に瑕疵のない標本を得ることはできないのであって，標本は対照によってその代表性が確認されれば，その限りにおいて代表的と言えるにすぎないという意味である。さらにジーニは次のように述べている。[28]

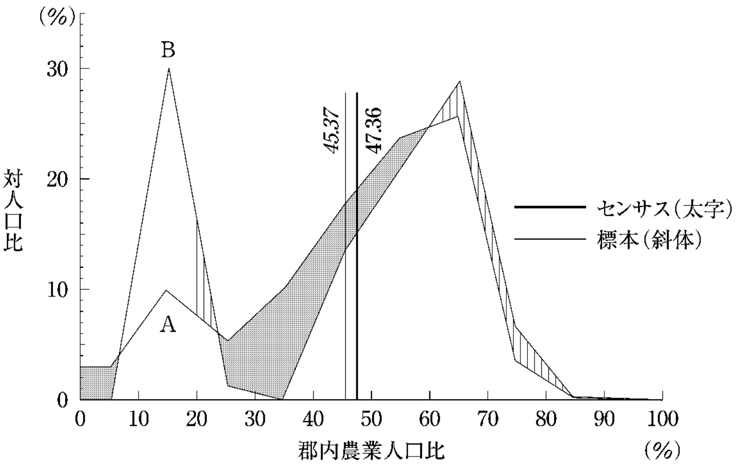

図5　人口分布（郡内農業人口比別）［第4操作特性値］

（訳注）

1．中央部分の縦線の数値はセンサス（214郡）と標本（29郡）のいずれについても

$$\frac{10\text{歳以上男性農業人口}}{10\text{歳以上男性人口}}\times 100$$

によって得た（表2の第4操作特性値参照）。

$$\text{センサス（太字）}:\frac{6{,}864{,}842}{14{,}495{,}343}\times 100=47.36\ (\%),\quad \text{標本（斜体）}:\frac{1{,}026{,}057}{2{,}261{,}669}\times 100=45.37\ (\%)$$

2．折れ線の数値はいずれも

$$\frac{\text{郡内農業人口比が同一である郡の10歳以上男性人口}}{\text{センサスまたは標本調査による10歳以上男性人口}}\times 100$$

による。たとえば郡内農業人口比が10～20％の郡については，そこに居住する10歳以上男性人口（非農業人口を含む）がセンサスでは1,486,383人，標本調査では678,429人であった。また全219郡（センサス）と29郡（標本）では10歳以上男性人口（非農業人口を含む）は各々，14,495,343人，2,261,669人であった。したがって，上式にこれらの数値を代入すると次のようになる。

$$\text{センサス（点A）}:\frac{1{,}486{,}383}{14{,}495{,}343}\times 100=10.3\ (\%),\quad \text{標　本（点B）}:\frac{678{,}429}{2{,}261{,}669}\times 100=30.0\ (\%)$$

このようにセンサスと標本について折れ線グラフを描き，その分布ごとに集中比を計算して，両者の乖離を数値で示したのが，表3の「相対的乖離」である。

（出所）Gini e Galvani (1929), p.95 (Tav. 26. Popolazione agricola)に加筆。

(27) Gini e Galvani (1929), p.22.

(28) Gini (1929), p.215.

「標本が完全に観察の全体の代わりになるということはけっしてありえない。

それゆえに，代表的な記録はいかなる意味でも全体にたいする完全な記載と同等ではない。

こうは言っても，一般論として代表法の使用を見合わせせるように勧めていると受けとめてほしくはない。代表法に訴えなければならないような事例があるということをわれわれは認めなければならない。── それは，この学会において報告の機会をあたえられたような事例である。調査の目的が，ある特性値の何らかの側面に限定されるような事例があり，しかも代表法がその目的により経済的に到達できるような事例の存在を認めることはできる。しかし，われわれは，標本の妥当性がつねに限界をもっており，またデータを害そうするときに付帯する制約を望まないときには，完全な記録が必要であるということを隠すべきではない。」

② ネイマンの見解

以上のようなジーニの見解を前にして，1934 年論文でネイマンは次のように述べた。

1．有意選出法の前提にある仮説（標本特性値と母集団特性値との線形関係）は成立しない。

2．仮説が成立しないときに有意選出を行っても良好な結果は得られない。

3．有意選出法よりも任意抽出法の方が望ましい。

この 1934 年論文におけるジーニ批判の論調は穏やかであった。しかし，1937 年講義では一転して舌鋒鋭く，ジーニの方法によれば「悲惨な結末」に陥るとして，次のように批判した[29]。以下の引用文に出てくる「次頁のグラフ」とは図 5 のことである。

「ジーニとガルバーニは，郡について 12［正しくは 9 つ］の特性値を選定して，これをコントロールとした。そして，これを本質的な［7 個の］コントロールと副次的な［2 個の］コントロールとに分類した。彼らは，標本から計算される本質的なコントロールの平均値と母集団から計算される値とが実際上同じになるように，29 の郡を選んだ。さらにまた，副次的なコントロールの平均についても母集団と標本が程よく一致するようにつとめた。これらの数字を見ると，標本におけるすべてのコントロールの平均値と母集団についてのそれとの一致はきわめて良好であることが分かる。……彼らは，標本の選出が成功したかどうかを検討し，さらにまたコントロールの平均値以外でも母集団との一致が満足のゆくものであるかどうかを検討しようとした。その結果は惨憺たるものであった。分布と言わず，相関と言わず，実際にコントロールの平均値を除くあらゆる特性値については，標本から明らかなように，母集団とは極端に不一致であることがわかったのである。次頁のグラフはイタリアの科学者たちがみずから公表したものの 1 つであるが，これは大きな単位の標本抽出がもたらしやすい悲惨な結末を示している。……

29 の郡からなる標本が母集団についてまったく代表的でないということに気づいて，イタリアの統計学者たちは，あらゆる特性から見て標本の母体たる母集団を，いわば再現する標本の獲得が一般に不可能であると述べたのである。厳密に言えば，もちろんこれは正しい。1926 年のイタリアには，無線通信の分野における偉大なる発明家マルコーニはただひとりしか存在していない。標本抽出の方法がどのようなものであっても，標本にしめるマルコーニの割合が母集団におけるマルコーニの割合と同じであるということはありえようはずがな

(29) Neyman (1937), pp.91f.

い。しかし，標本を抽出するのは，そのような割合をはっきりさせようとするからではないのであって，何らかの大きさや回帰などを推定するという実際の統計的な問題を解こうとするときはいつも，しかるべく抽出された標本は，あらゆる実際上の目的にとって満足できるということを，理論と経験は示しているのである。」

以上，ネイマンが解決を迫られていた課題は第1にはボーレーへの批判であり，第2にはジーニへの批判であったことを述べた。そして，それにたいするネイマンの所見を述べた。次に，もう少し検討の領域を広げて，標本調査をめぐる20世紀初頭の理論状況がどうであったかについて見ることにしよう。これによって，ネイマンの標本調査理論が待望されていた当時の事情の一端をさらに明らかにしたい。（以下，次号）

［補注］本文に掲げた

$$R=\frac{\sum_{l=1}^{s}(i_{l-1}+i_l-1)f_l x_l}{(n-1)A_n}-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

は，よく見られるジーニ係数 G の定義式とは異なっている。G の定義式としては，

$$G=\frac{1}{2\times\bar{y}\times n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|y_i-y_j| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots\cdots \leqq y_n$

（y_i はたとえば世帯の所得額）

（ジーニ係数はその名前にちなんで G と表記されることが多いが，最初にジーニが定義したときには，本文で述べたように，それは R となっている。）

を冒頭に掲げて，G を説明するのが珍しくないからである。この①式の典拠は，アメリカ・コールズ委員会の研究紀要である（Gini, C., “On the Measurement of Concentration with Special Reference to Income and Wealth,” *Abstracts of Papers presented at the Cowles Commission Research Conference on Economics and Statistics*, Colorado, 1936.）。①式は，集中比にたいする最初の定義［Gini（1913-14)］から20年以上を経た後に，上記研究紀要のなかで言葉で述べたことがらを，数式で表現し直したものである。

世帯の所得を例にして，この①式の意味を述べる。このためには，異なる家計の所得 y_i を2つずつ組み合わせて，その差の絶対値（世帯間の所得格差）をとることからスタートすると，理解しやすい。まず，絶対値 $|y_i-y_j|$ をもとめ，次にそれを所得 y_i の平均値 $\bar{y}$ で割る。この操作によって世帯間の所得格差は新たに所得 y_i の平均値 $\bar{y}$ によって測定し直されることになる。このようにして測定し直された所得格差の組み合わせは（同一世帯どうしの世帯の組［たとえば（y_1, y_1)，(y_2, y_2)，……］を含めると）全部で n^2 個ある。したがって，この測定し直された所得格差を，その個数 n^2 で割ると，（測定し直された）所得格差の平均値をもとめることができる。そのうえで，さらにそれを2で割るというのが①式である。証明は省略するが，この①式を変形すれば，ジーニが標本の代表性を検討するときに使用した(7)式を誘導することができる。

なお，ジーニ係数 G の定義式としては下に掲げる②式が用いられることもある。そこで，そのことについても簡単に触れておこう。これも証明は省略するが，①式を変形して整理すれば，②式を誘導することができる。

$$G=1-\sum_{i=2}^{n}(\eta_i+\eta_{i-1})(\xi_i-\xi_{i-1}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

ここに，たとえば η（イータ）は所得の累積相対度数，ξ（ゼータ）は世帯の累積相対度数

この②式は，集中比の定義式としてはもっとも新しく（1962年に），しかも①式とは独立に公表された式である（C. Gini, “Distribution of a Collective Phenomenon: Concentration,” *Metron*, Vol.22, 1962, in Chap. VIII of his “Statistical Methods with special reference to Agriculture,” *Metron*, Vol.22 (1960)-Vol.23 (1964).）。この定義式が注目されるのは，2変数の累積相対度数があたえられている場合にジーニ係数 G を計算することができるということによる。

それだけではない。②式が注目されるのは，この式を用いれば，45度線（所得均等直線）とローレンツ曲線で囲まれた部分の面積 λ とジーニ係数 G との間にある数量的関係を規定することができるためでもある。すなわち，②式を用いれば，

$G = 2\lambda$ ……………………………………③

となることを証明できる。そして，この数学的関係をより所にして，ふつうはジーニ係数 G が所得均等直線とローレンツ曲線で囲まれ部分の面積 λ の 2 倍である，と教えられている。

しかし，③式を変形して

$$G = \frac{\lambda}{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots ④$$

という関係に置き換える方が，ジーニ係数 G の意味する事柄が明確になるのではないかと思われる。所得が均等に分配される完全平等な社会の場合のローレンツ曲線は，所得均等直線（45 度線）に等しく，このときに所得分布を示す図形は 1 辺が長さ 1 の直角 2 等辺三角形であって，その面積は 1/2 である。他方で，所得が不均等に分布している社会では $\lambda > 0$ である。④式は，完全平等な社会（1/2）の場合と不平等な社会（$\lambda > 0$）の場合の比の値を示している。「ジニ係数はローレンツ曲線と対角線 OB に囲まれた部分の面積（斜線部分）を三角形OABの面積で除したものである。」(高山憲之「富と所得の分布」『経済学大辞典（第 2 版)』 I，東洋経済新報社，1980 年，473 頁）という指摘は含蓄が深い。

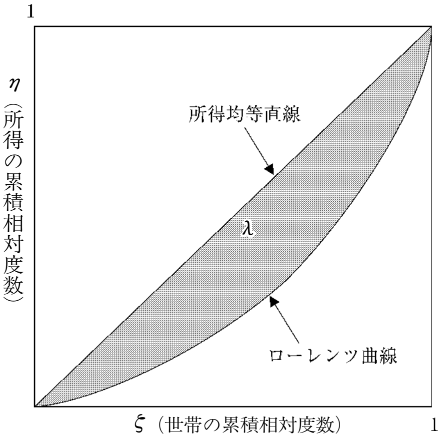

図　所得均等直線とローレンツ曲線