《論説》

携帯電話用 Web サイト最適化問題について

穴　沢　　　務

はじめに

WWW (World Wide Web)は，各地の Web サイトに公開されたマルチメディア情報をインターネットを通じて配信するための，世界規模の情報ネットワークシステムである。その基礎は，1990 年代はじめの CERN（欧州原子核研究機関）による HTML (Hyper Text Markup Language)やブラウザの開発によって確立した。その後，1993 年に Mosaic，その翌年に Netscape というパーソナルコンピュータ用ブラウザが登場し，WWW の利用に拍車がかかった（その歴史については例えば Abbate［1］を見よ)。

日本では，1999 年に NTT ドコモが携帯電話から Web サイトを閲覧するサービス（i-mode）を開始し，それが WWW の利用者を爆発的に増加させた。総務省［6］によれば，2000 年 1 月末のインターネット利用者数は，ダイヤルアップ接続が 1110 万人，携帯電話による利用が 459 万人だったのに対し，2002 年 11 月末では，前者が 2129 万人，後者が 5843 万人となった。この事実は，携帯電話による Web サイト閲覧サービスが WWW の普及に多大なインパクトを与えたことを示す。したがって，携帯電話用 Web サイトを魅力的に構築することは，企業の経営戦略において重要な位置を占めつつあると言える。加えて，携帯電話で Web サイトを閲覧する場合はページを読み込むごとに課金が発生するという特殊事情がある。よって，利用者の金銭的な負担を少なくするために，ページの移動を最小限に抑えた Web サイトの構築が求められる。そこに，携帯電話用 Web サイトをモデル化して最適な構造を求めようというモチベーションが生まれてくる。

そこで本稿では，携帯電話用の Web サイトのリンク構造を最適化するための問題を取り上げる。この問題に対して，Koizumi［5］は典型的な携帯電話用 Web サイトとして次の 4 種類のページからなる Web サイトに限定し，そのモデル化を試みた（図 1 を参照)。

（i）**トップページ**：ページのタイトル，ロゴ，発行者，ルートページへのリンクだけからなるページ。

（ii）**ルートページ**：メニューページの 1 つで，トップページからリンクが張られる唯一のページ。

（iii）**メニューページ**：他のページへのリンクのみからなるページで，コンテンツ（閲覧者が欲する実質的情報）は含まない。

（iv）**コンテンツページ**：コンテンツとリターンリンク（自分をリンクするページへ戻るリンク）

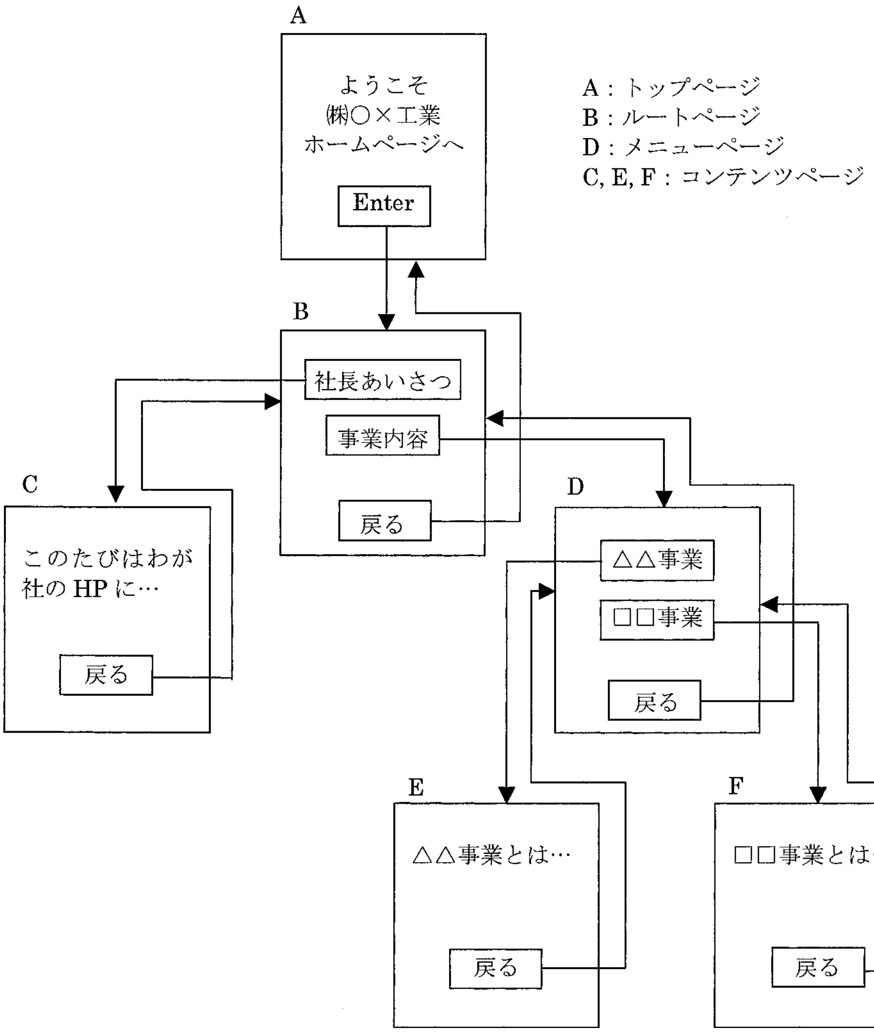

図 1：典型的な携帯電話用 Web サイトの例

だけからなるページ。

また Koizumi［５］はモデル化に際し次のような仮定を設けた。

- トップページ以外のすべてのページは，自分にリンクを張るすべてのページに対してリターンリンクを張っている。
- 各ページを節，１つのページからもう１つのページへのリンクとそれに対応するリターンリンクの組を無向枝とするグラフを考えると，その構造は木である（図 2 を参照)。
- ディスプレイサイズ等の制約から，メニューページにおけるリンクの数には一定の上限が設けられている。

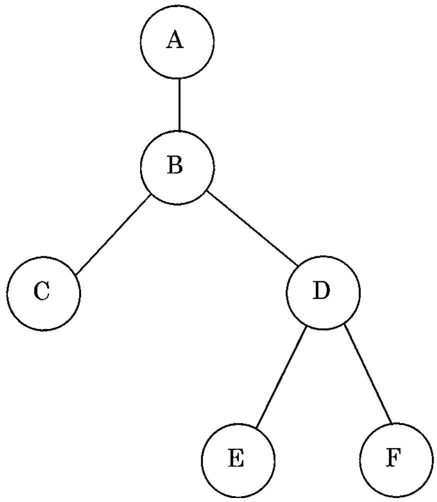

図 2：木構造の例（図 1 に対応）

- 1 つのコンテンツページから別のコンテンツページへ移動する頻度が，すべてのコンテンツページの組に対して既知である。

このとき Koizumi［5］は，ある木のクラスにおいてはハフマンの符号化と同様の方法で最適木，すなわち平均ページ読込み回数が最小となる木が得られることを示した（ハフマン符号については例えば Aho ら［2］を見よ）。

本稿でもそのモデルと同じ目的関数を別の木のクラスにおいて最小化する問題を考え，ある条件を満たすとき最適木が explicit に表現できることを示す。第 1 章では本稿で必要な用語・記号の定義と，問題の定式化を行う。本稿の主定理は第 3 章（その証明は第 4 章）で述べるが，そのための理論的な準備を第 2 章で行う。第 5 章で主定理を少し一般化した系を述べ，おわりに系で述べた条件の実際的な解釈と今後の課題を述べる。

1　問題の定式化

これ以降，木といえば根つき無向木を表すものとする。木 T の根を $r(T)$，節の集合を $V(T)$，枝の集合を $E(T)$ とする。2 節 v，$w \in V(T)$ に対して $d(v, w; T)$ は T 上のパス $(v, \ldots, w)$ に含まれる枝の数を表す。節 v の深さを $d(v, r(T); T)$，木 T の高さを $\max_{v \in V(T)} d(v, r(T); T)$ とそれぞれ定義する。その他，節に関する「親」「子」「兄弟」「子孫」という用語の定義は，標準的なテキスト（例えば Aho ら［2］）のものを踏襲する。

ここでは葉（子を持たない節）の集合 L があらかじめ与えられているとする（葉は Web サイト内のトップページやコンテンツページを表す）。また，各葉の組 $\{v, w\}(v, w \in L)$ に対して，非負の重み p_{vw} が与えられているとする（p_{vw} は v から w への移動頻度を表す。$p_{vw} = p_{wv}$ とは限らない）。本稿で考える問題は，$L \subset V(T)$ を満たす木の中で，

$$f(T)=\sum_{v\in L}\sum_{w\in L}d(v,w;T)p_{vw}$$

を最小にする木を見つけることである。但し，すでに仮定したように，ここでは次数（節から出る枝の本数）に制限がある場合を考える。

各節とも高々k個の子しか持たない木をk分木という。高さHのk分木の葉の数がk^Hのとき，それは**フル**であるという。高さHのフルk分木からk'個（$1\leq k'\leq k-2$）の葉を除いてできる木を，ここでは高さHの**準フル**k分木と呼ぼう。また，**トップつき木**は，根にトップ（トップページに対応）と呼ばれる葉を１つだけ隣接させてできる木と定義する。本稿では，与えられたk，Hに対して$n\equiv|L|-1=k^H-k'$$(0\leq k'\leq k-2)$を満たす$k'$が存在する場合を考える。そして，トップが$t$，トップ以外の葉の数が$n$のトップつき高さ$H$のフル（または準フル）$k$分木の集合を$\mathcal{T}_n^t$とおき，$t$が固定されているとき$\mathcal{T}_n^t$の中で関数$f$を最小にする木を求める問題を考える。

2　準　　備

本稿では，$T\in\mathcal{T}_n^t$の各節を以下のように相異なる整数で表す。

$$L=\{0,1,2,\ldots,n\}\ (t\in L),\quad V(T)\setminus L=\{k^H+1,k^H+2,\ldots\}.$$

$L\setminus\{t\}$の中で，i番目に小さい番号の節をs_iとし，$L\setminus\{t\}$の部分集合Sに対して，$I(S)=\{i\mid s_i\in S\}$とする。

$n=k^H$のとき，$T\in\mathcal{T}_{k^H}^t$に対する部分木の表現を以下のように定める。$T\setminus\{t\}$（$\equiv(V(T)\setminus\{t\},\ E(T)\setminus\{(t,r(T))\})$）の葉でない節から伸びる枝に１から$k$までのラベルがついているとする。$r(T)$から，深さ$h\geq1$のある節$v$までのパスに含まれる枝のラベルが$d_1,\ldots,d_h$$(1\leq d_i\leq k\ ;\ i=1,\ldots,h)$と並ぶとき，その$v$の子孫からなる部分木を$T_{[d_1\cdots d_h]}$と書き，$r(T_{[d_1\cdots d_h]})=v$とおく。なお，$h=0$に対する部分木は$T_{[]}=T\setminus\{t\}$とし，$r(T_{[]})=r(T)$とおく（図３を参照）。また，部分木$T_{[d_1\cdots d_h]}$に含まれる葉の集合を$L(T_{[d_1\cdots d_h]})$とする。

$T\in\mathcal{T}_{k^H}^t$に対して，f値を減少させるかもしれない次のような変換方法を考える。Tの２つの部分木$T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}$と$T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]}$（すなわちそれらの根は兄弟である）を任意に選んだとき，それらはともに高さ$H-h$のフルk分木なので，１つの同型写像

$$\sigma:\ V(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})\rightarrow V(_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})\ \text{ s.t. }\sigma(r(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}))=r(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})$$

が定義できる。そこで，$L_{GT}=\{v\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})|v>\sigma(v)\}$とおき，すべての$v\in L_{GT}$に対して$v$と$\sigma(v)$を交換する（この操作を$\sigma$に関する*biasing*という。例えば Anazawa［３］を参照せよ)。こうしてできる木をT'とすると，次のことが成り立つ。

補題１　もし$\{p_{vw}\}$が

$$p_{vw}+p_{v'w'}\geq p_{vw'}+p_{v'w}\ \ for\ \ all\ \ 0\leq v<v'\leq k^H,\ 0\leq w<w'\leq k^H \tag{1}$$

を満たすならば，$f(T')\leq f(T)$が成り立つ。

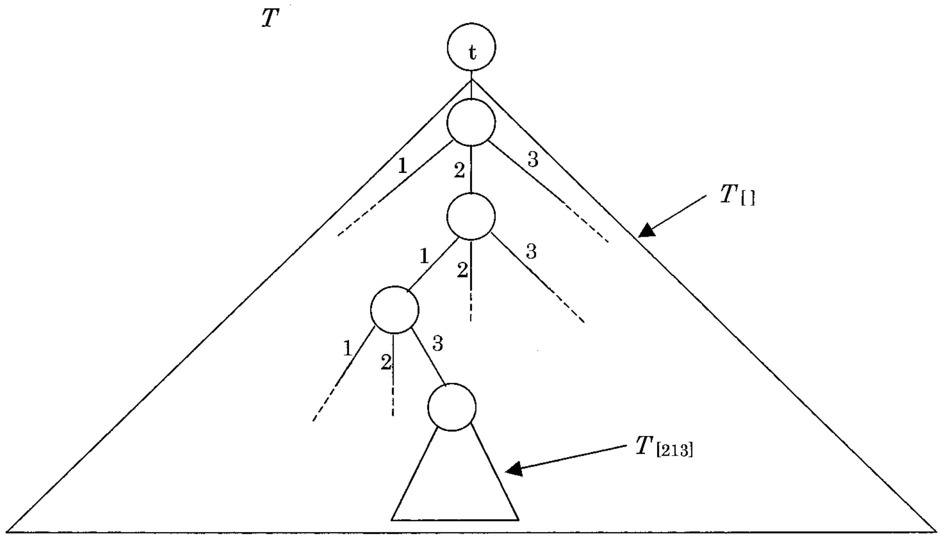

図 3：部分木の表現（$k=3$ の場合）

備考　不等式(1)は *inverse Monge property* と呼ばれている。(例えば Burkard ら［ 4 ］を見よ。）また論文［ 3 ］のように対称性（どの v, w に対しても $p_{vw}=p_{wv}$）が仮定されている場合の同様の不等式は *inverse Supnic property* と呼ばれている。

証明　$\bar{L}_{\mathrm{GT}}=L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})\backslash L_{\mathrm{GT}}$, $\sigma(L_{\mathrm{GT}})=\{\sigma(v)\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})\mid v\in L_{\mathrm{GT}}\}$, $\sigma(\bar{L}_{\mathrm{GT}})=L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})\backslash\sigma(L_{\mathrm{GT}})$ とおく。

$$f(T)=\sum_{v\in L}\sum_{w\in L}d(v,w;T)p_{vw}=\sum_{v,w\in L:v<w}d(v,w;T)(p_{vw}+p_{wv})$$

に注意し，$D_{vw}=\{d(v,w;T')-d(v,w;T)\}(p_{vw}+p_{wv})$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&f(T')-f(T)\\
&=\sum_{v\in L_{\mathrm{GT}},w\in\bar{L}_{\mathrm{GT}}}D_{vw}+\sum_{v\in L_{\mathrm{GT}},w\in\sigma(\bar{L}_{\mathrm{GT}})}D_{vw}\sum_{v\in\sigma(L_{\mathrm{GT}}),w\in\bar{L}_{\mathrm{GT}}}D_{vw}+\sum_{v\in\sigma(L_{\mathrm{GT}}),w\in\sigma(\bar{L}_{\mathrm{GT}})}D_{vw}\\
&=\sum_{v\in L_{\mathrm{GT}},w\in\bar{L}_{\mathrm{GT}}}(D_{vw}+D_{v\sigma(w)}+D_{\sigma(v)w}+D_{\sigma(v)\sigma(w)})
\end{aligned}\tag{2}$$

となることがわかる。任意の $v\in L_{\mathrm{GT}}$, $w\in\bar{L}_{\mathrm{GT}}$ に対して，$\delta_{vw}=d(v,w;T)$, $\Delta_{vw}=d(v,w;T')$ とおくと，明らかに $\delta_{vw}<\Delta_{vw}$であり，

$$\begin{aligned}
\delta_{vw}&=d(v,w;T)=d(\sigma(v),\sigma(w);T)=d(\sigma(v),w;T')=d(v,\sigma(w);T'),\\
\Delta_{vw}&=d(v,w;T')=d(\sigma(v),\sigma(w);T')=d(\sigma(v),w;T)=d(v,\sigma(w);T)
\end{aligned}$$

が成り立つ。故に，

$$(2)=\sum_{v\in L_{\mathrm{GT}},w\in\overline{L}_{\mathrm{GT}}}(\delta_{vw}-\Delta_{vw})$$

$$\times\{(p_{\sigma(v)w}+p_{v\sigma(w)}-p_{\sigma(v)\sigma(w)}-p_{vw})+(p_{w\sigma(v)}+p_{\sigma(w)v}-p_{wv}-p_{\sigma(w)\sigma(v)})\}\leq 0$$

を得る。□

3　主定理（$n=k^H$ の場合）

本稿の主定理を述べる前に，トップつき高さ H のフル k 分木に関する 1 つの性質を定義しよう。まず，整数を要素に持つ 2 つの有限集合 A，B に対して，$A<B$ は $\max A<\min B$ を意味する。1 つのトップつき高さ H のフル k 分木 T に対して，根が兄弟である 2 つの部分木 $T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}$ と $T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]}$ をどのように選んでも，

$$L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})<L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})\ \text{ or }\ L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})<L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$$

を満たすとき，T は**完全順序性**を満たすという。そのような木の例を図 4 に示す。

定理 1　$\{p_{vw}\}$ が不等式(1)を満たすならば，完全順序性を満たすトップつき高さ H のフル k 分木は $\mathcal{T}^t_{k^H}$ の中で f 値を最小にする。

定理 1 を証明する準備として，整数の集合 $\ell=\{1,2,\ldots,k^H\}$ に対する次のような分割を考える。各 $h(1\leq h\leq H-1)$ に対して，ℓ を小さい順に k^{H-h} 個の要素からなる k^h 個の部分集合に等分割し，さらにそれら部分集合を生成された順に k 個ずつの部分集合からなる族に分ける(したがって族の数は k^{h-1} 個である)。このとき，第 i 族の第 j 部分集合を $I_{h,i,j}$ とすれば，

$$I_{h,i,j}=\{(i-1)k^{H-h+1}+(j-1)k^{H-h}+x\mid x=1,2,\ldots,k^{H-h}\}\,(i=1,2,\ldots,k^{h-1}\,;\,j=1,2,\ldots,k)$$

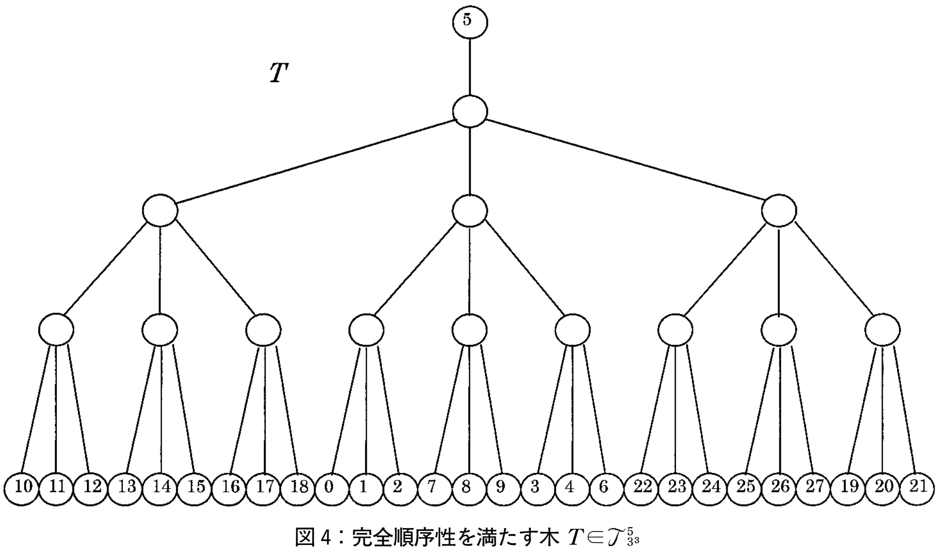

図 4：完全順序性を満たす木 $T\in\mathcal{T}^5_{3^3}$

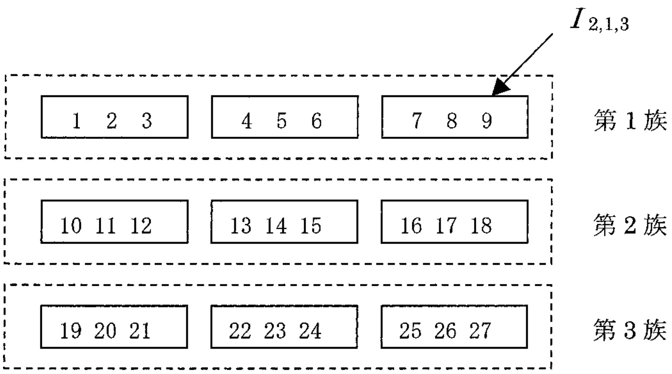

図 5：$\ell=\{1,2,\ldots,3^3\}$，$h=2$ に対する分割

となるのは明らかである（図 5 を参照）。

ここで $j<j'$ ならば $I_{h,i,j}<I_{h,i,j'}$ となることに注意しよう。このような $I_{h,i,j}$ と $I_{h,i,j'}$ に対して，根が兄弟である 2 つの部分木 $T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}$ と $T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]}$ が

$$I(L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}))=I_{h,i,j} \text{ and } I(L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]}))=I_{h,i,j'}$$

を満たすならば，$L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})<L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})$ となることは明らかである。

また，$I_{h-1,i,j}=\cup_{j'=1}^{k}I_{h,(i-1)k+j,j'}$ $(i=1,\ldots,k^{h-2};\ j=1,\ldots,k)$ であることも容易に確かめられる。実際，

$$\begin{aligned}
I_{h-1,i,j}&=\{(i-1)k^{H-h+2}+(j-1)k^{H-h+1}+x \mid x=1,2,\ldots,k^{H-h+1}\}\\
&=\{(i-1)k^{H-h+2}+(j-1)k^{H-h+1}+x \mid x=(j'-1)k^{H-h}+1,\ldots,j'k^{H-h};j'=1,\ldots,k\}\\
&=\bigcup_{j'=1}^{k}\{(i-1)k^{H-h+2}+(j-1)k^{H-h+1}+(j'-1)k^{H-h}+x \mid x=1,2,\ldots,k^{H-h}\}\\
&=\bigcup_{j'=1}^{k}\{((i-1)k+j-1)k^{H-h+1}+(j'-1)k^{H-h}+x \mid x=1,2,\ldots,k^{H-h}\}\\
&=\bigcup_{j'=1}^{k}I_{h,(i-1)k+j,j'}.
\end{aligned}$$

よって，$I_{h,i,j}$ は $i-1=(i_0-1)k+(j_0-1)$ $(0\leq j_0-1<k)$ を満たす i_0，j_0 に対する I_{h-1,i_0,j_0} の部分集合である。

4　定理 1 の証明

木 $T\in\mathcal{T}_{k^H}^{t}$ が $f(T)=\min_{T'\in\mathcal{T}_{k^H}^{t}}f(T')$ を満たしているとする。T に有限回の biasing を施して完全順序性を満たす木に変換できることを示せばよい。そのためのアルゴリズムとして，以下を考える。

for $h \leftarrow 1$ to $H-1$ do
　for $i \leftarrow 1$ to k^{h-1} do
　　for $j \leftarrow 1$ to $k-1$ do
　　　for $l \leftarrow (i-1)k^{H-h+1}+(j-1)k^{H-h}+1$ to $(i-1)k^{H-h+1}+jk^{H-h}-1$ do begin
　　　　$[d_1 \cdots d_{h-1} d_h] \leftarrow$ the sequence s.t. $s_l \in L(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d_h]})$;
　　　　if $s_{l+1} \notin L(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d_h]})$ then begin
　　　　　$[d_1 \cdots d_{h-1} d'_h] \leftarrow$ the sequence s.t. $s_{l+1} \in L(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d'_h]})$;
　　　　　define $\sigma: V(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d_h]}) \rightarrow V(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d'_h]})$
　　　　　　s.t. $\sigma(r(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d_h]})) = r(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d'_h]})$,
　　　　　　$\sigma(s_{l'}) = s_{l+1}$ where $s_{l'} \in L(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d_h]})$ and $l' > l+1$;
　　　　　apply biasing with respect to σ to $T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d_h]}$ and $T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d'_h]}$;
　　　　end;
　　　end;

このアルゴリズムにおいて，l と $l+1$ が常に $I_{h,i,j}$ に含まれることは明らかである。このアルゴリズムが正しく動作するための条件は以下のとおりである。

（ｉ）$s_{l+1} \notin L(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d_h]})$ のとき，$s_{l+1} \in L(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d'_h]})$ なる $[d_1 \cdots d_{h-1} d'_h]$ が必ず見つかる。
（ii）$s_{l'} \in L(T_{[d_1 \cdots d_{h-1} d_h]})$ かつ $l' > l+1$ なる $s_{l'}$ が必ず存在する。

以上の条件を満たすことを確かめながら，完全順序性を満たす木への変換が確かにうまくいくことを，次の 2 つの小節で示す。

$h=1$ のとき

このとき，$i=1$ の場合のみ実行される。考えるべきすべての部分木 $T_{[d_1]}(1 \leq d_1 \leq k)$ の根は同じ親 $r(T_{[]})$ を持つ兄弟であるから，条件（ｉ）を満たすことは明らかである。
($j=1$ に対して)　$l=1, \ldots, k^{H-1}-1$ の順に実行する中で，$s_l \in L(T_{[d_1]})$ かつ $s_{l+1} \in L(T_{[d'_1]})(d_1 \neq d'_1)$ を最初に満たす l を l_0 とおく。このとき $s_1, s_2, \ldots, s_{l_0} \in L(T_{[d_1]})$ は明らか。また，

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_{l_0}\} < L(T_{[]}) \backslash \{s_1, s_2, \ldots, s_{l_0}\} \iff \{1, 2, \ldots, l_0\} < I(L(T_{[]})) \backslash \{1, 2, \ldots, l_0\}$$

かつ

$$L(T_{[d_1]}) \backslash \{s_1, s_2, \ldots, s_{l_0}\} \neq \emptyset$$

だから，$s_{l_0+1} \notin L(T_{[d_1]})$ であれば $s_{l'} \in L(T_{[d_1]})(l' > l_0+1)$ なる $s_{l'}$ の存在は明らか（すなわち条件（ii）を満たす)。よって，$\sigma: V(T_{[d_1]}) \rightarrow V(T_{[d'_1]})$（但し $\sigma(r(T_{[d_1]})) = r(T_{[d'_1]})$ かつ $\sigma(s_{l'}) = s_{l_0+1}$）は定義可能である。この σ に関する biasing 実行後は，明らかに $s_1, s_2, \ldots, s_{l_0}, s_{l_0+1} \in L(T_{[d_1]})$ を満たす。また，このとき作られる木の f 値は補題 1 より不変である。以上を繰り返すと，$l=k^{H-1}-1$ ステップ終了時には，

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_{k^{H-1}}\}=L(T_{[d_1]}) \iff I(L(T_{[d_1]}))=I_{1,1,1}$$

が成り立つ。

($2\leq j\leq k-1$ に対して) すべての $j'<j$ に対して $I(L(T_{[d_1]}))=I_{1,1,j'}$ を満たす相異なる d_1 があると仮定する。$l=(j-1)k^{H-1}+1, \ldots, jk^{H-1}-1$ の順で実行する中で，最初に $s_l\in L(T_{[d_1]})$ かつ $s_{l+1}\in L(T_{[d'_1]})(d_1\neq d'_1)$ を満たす l を l_0 とおく。このとき $s_{(j-1)k^{H-1}+1}, \ldots, s_{l_0}\in L(T_{[d_1]})$ は明らか。また仮定より

$$I_{1,1,1}<I_{1,1,2}<\cdots<I_{1,1,j-1}<\{(j-1)k^{H-1}+1, \ldots, l_0\}$$
$$<I(L(T_{[]}))\setminus\left\{\left(\bigcup_{j'=1}^{j-1} I_{1,1,j'}\right)\cup\{(j-1)k^{H-1}+1, \ldots, l_0\}\right\}$$

が成り立ち，かつ

$$L(T_{[d_1]})\setminus\{s_{(j-1)k^{H-1}+1}, \ldots, s_{l_0}\}\neq\emptyset$$

であるから，$s_{l_0+1}\notin L(T_{[d_1]})$ であれば，$s_{l'}\in L(T_{[d_1]})$ ($l'>l_0+1$) なる $s_{l'}$ が存在する（条件（ii）を満たす)。よって $j=1$ のときと同様に同型写像 σ を定義し，それに関する biasing を実行すると，$s_{(j-1)k^{H-1}+1}, \ldots, s_{l_0}, s_{l_0+1}\in L(T_{[d_1]})$ が得られる。以上を繰り返すと $l=jk^{H-1}-1$ ステップ終了時には，すべての $j'\leq j$ に対して $I(L(T_{[d_1]}))=I_{1,1,j'}$ を満たす相異なる d_1 が存在する。

($j=k-1$ ステップ終了時)　すべての $1\leq j\leq k$ に対して $I(L(T_{[d_1]}))=I_{1,1,j}$ を満たす相異なる d_1 が存在するのは明らか。故に，どの $d_1, d'_1(d_1\neq d'_1)$ に対しても

$$L(T_{[d_1]})<L(T_{[d'_1]}) \text{ or } L(T_{[d'_1]})<L(T_{[d_1]})$$

が成り立つ。

$2\leq h\leq H-1$ のとき

$h'=h-1$ とすべての $i'(i'=1, \ldots, k^{h'-1})$，$j'(j'=1, \ldots, k)$ に対して，$I(L(T_{[d_1\cdots d_{h'}]}))=I_{h',i',j'}$ を満たす相異なるラベル列 $[d_1\cdots d_{h'}]$ が存在すると仮定する。まず，各 l に対して条件（i）が成り立つことを示そう。$l, l+1\in I_{h,i,j}$ を思い起こそう。$i-1=(i_0-1)k+(j_0-1)(0\leq j_0-1<k)$ を満たす i_0，j_0 に対して $I_{h,i,j}\subset I_{h',i_0,j_0}$ を満たすので，仮定より $I_{h,i,j}\subset I(L(T_{[d_1\cdots d_{h'}]}))$ なる $[d_1\cdots d_{h'}]$ が存在する。故に，$s_l\in L(T_{[d_1\cdots d_{h'}d_h]})$ なる $[d_1\cdots d_{h'}d_h]$ に対して $s_{l+1}\notin L(T_{[d_1\cdots d_{h'}d_h]})$ のとき，$s_{l+1}\in L(T_{[d_1\cdots d_{h'}d'_h]})$ なる $[d_1\cdots d_{h'}d'_h]$ が存在する（すなわち条件（i）を満たす)。

各 $i(i=1, \ldots, k^{h-1})$ に対して次のことがわかる。

($j=1$ に対して)　$l=(i-1)k^{H-h+1}+1, \ldots, (i-1)k^{H-h+1}+k^{H-h}-1$ の順に実行する中で，$s_l\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$ かつ $s_{l+1}\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})(d_h\neq d'_h)$ を最初に満たす l を l_0 とおく。このとき $s_{(i-1)k^{H-h+1}+1}, \ldots, s_{l_0}\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$ は明らか。また，

$$\{s_{(i-1)k^{H-h+1}+1}, \ldots, s_{l_0}\}<L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}]})\setminus\{s_{(i-1)k^{H-h+1}+1}, \ldots, s_{l_0}\}$$

$$\iff\{(i-1)k^{H-h+1}+1, \ldots, l_0\}<I(L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}]}))\setminus\{(i-1)k^{H-h+1}+1, \ldots, l_0\}$$

かつ

$$L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})\setminus\{s_{(i-1)k^{H-h+1}+1},\dots,s_{l_0}\}\neq\emptyset$$

だから，$s_{l_0+1}\notin L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$ であれば $s_{l'}\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})(l'>l_0+1)$ なる $s_{l'}$ の存在は明らか（すなわち条件（ii）を満たす）。よって，$\sigma: V(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})\to V(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})$（但し $\sigma(r(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}))=r(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})$ かつ $\sigma(s_{l'})=(s_{l_0+1})$ は定義可能である。この σ に関する biasing 実行後は，明らかに，$s_{(i-1)k^{H-h+1}+1},\dots,s_{l_0},s_{l_0+1}\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$ を満たす。以上を繰り返すと，$l=(i-1)k^{H-h+1}+k^{H-h}-1$ ステップ終了時には，

$$\{s_{(i-1)k^{H-h+1}+1},\dots,s_{(i-1)k^{H-h+1}+k^{H-h}}\}=L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})\Longleftrightarrow I(L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}))=I_{h,i,1}$$

が成り立つ。

($2\leq j\leq k-1$ に対して) すべての $j'<j$ に対して $I(L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}))=I_{h,i,j'}$ を満たす相異なる d_h があると仮定する（但し $d_1\cdots d_{h-1}$ は i によって異なる)。$l=(i-1)k^{H-h+1}+(j-1)k^{H-h}+1,\dots,(i-1)k^{H-h+1}+jk^{H-h}-1$ の順で実行する中で，最初に $s_l\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$ かつ $s_{l+1}\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})(d_h\neq d'_h)$ を満たす l を l_0 とおく。このとき $s_{(i-1)k^{H-h+1}+(j-1)k^{H-h}+1},\dots,s_{l_0}\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$ は明らか。また仮定より

$$I_{h,i,1}<I_{h,i,2}<\cdots<I_{h,i,j-1}<\{(i-1)k^{H-h+1}+(j-1)k^{H-h}+1,\dots,l_0\}$$

$$<I(L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}]}))\setminus\left\{\left(\bigcup_{j'=1}^{j-1}I_{h,i,j'}\right)\cup\{(i-1)k^{H-h+1}+(j-1)k^{H-h}+1,\dots,l_0\}\right\}$$

が成り立ち，かつ

$$L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})\setminus\{s_{(i-1)k^{H-h+1}+(j-1)k^{H-h}+1},\dots,s_{l_0}\}\neq\emptyset$$

であるから，$s_{l_0+1}\notin L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$ であれば，$s_{l'}\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})(l'>l_0+1)$ なる $s_{l'}$ が存在する（条件（ii）を満たす)。よって $j=1$ のときと同様に同型写像 σ を定義し，それに関する biasing を実行すると，$s_{(i-1)k^{H-h+1}+(j-1)k^{H-h}+1},\dots,s_{l_0},s_{l_0+1}\in L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$ が得られる。以上を繰り返すと $l=(i-1)k^{H-h+1}+jk^{H-h}-1$ ステップ終了時には，すべての $j'\leq j$ に対して $I(L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}))=I_{h,i,j'}$ を満たす相異なる d_h が存在する。

($j=k-1$ ステップ終了時) すべての $1\leq j\leq k$ に対して $I(L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]}))=I_{h,i,j}$ を満たす相異なる d_h（但し $d_1\cdots d_{h-1}$ は i によって異なる）が存在するのは明らか。故に，どの $d_h, d'_h(d_h\neq d'_h)$ に対しても

$$L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})<L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})\text{ or }L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d'_h]})<L(T_{[d_1\cdots d_{h-1}d_h]})$$

が得られる（これは各 i に対して成り立つ)。

以上により，すべての最適木 $T\in\mathcal{T}^t_{k^H}$ は前述のアルゴリズムによって完全順序性を満たす木に変換可能である。$\square$

5　$n<k^H$ に対する主定理の拡張

木 $T\in\mathcal{T}^t_n$（但し $n=k^H-k'$，$1\leq k'\leq k-2$ なる k' が存在する）に対しては，k' 個のダミー葉

$n+1, n+2, \ldots, n+k'(=k^H)$ を追加することで，トップつき高さ H のフル k 分木（例えば $\hat{T}$）を作ることができる。そして，すべての $v \geq n+1$ に対して $p_{vw}=p_{wv}=0$ $(0 \leq w \leq k^H)$ を仮定すれば，明らかに $f(\hat{T})=f(T)$ である。

このような n に対しては，$\{p_{vw}\}$ が

$$\begin{aligned} &p_{vw} \geq p_{vw'} \text{ and } p_{wv} \geq p_{w'v} && \text{for all} \quad 0 \leq v \leq n,\ 0 \leq w < w' \leq n, \\ &p_{vw}+p_{v'w'} \geq p_{vw'}+p_{v'w} && \text{for all} \quad 0 \leq v < v' \leq n,\ 0 \leq w < w' \leq n \end{aligned} \tag{3}$$

を満たすならば，ダミー葉を追加した後に不等式(1)も満たす。実際，$n < v \leq k^H$ または $n < w \leq k^H$ のとき，不等式(1)は明らかに成り立つ。v と w がともに n 以下の場合，$n < v' \leq k^H$ ならば $p_{vw} \geq p_{vw'}$，$n < w' \leq k^H$ ならば $p_{vw} \geq p_{v'w}$ がそれぞれ得られるので，不等式(1)は成り立つ。

よって，次の系が得られる。

系 1　n がある $k'(1 \leq k' \leq k-2)$ に対して $n=k^H-k'$ を満たすとき，木 $T \in \mathcal{T}_n^t$ に k' 個のダミー葉を追加してできる木を $\hat{T}(\in \mathcal{T}_{k^H}^t)$ とする。n に対して $\{p_{vw}\}$ が条件(3)を満たし，かつ $\hat{T}$ が完全順序性を満たすならば，$f(T)=\min_{T' \in \mathcal{T}_n^t} f(T')$ を満たす。

おわりに

条件(3)は，ページ $v \in L$ の平均アクセス数を a_v とするとき，各ページが

$$a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n$$

となるように番号付けされ，かつすべての $p_{vw}(v,w \in L)$ が a_v と a_w の積に比例すると仮定する場合に成り立つ。これは p_{vw} が事前にわからない場合に設けられる自然な仮定である。

本稿ではトップをある節 $t \in L$ に固定した場合を扱ったが，t を可変とし，どの節をトップとしたとき目的関数 f が最小になるかという問題も興味深い。

さらに，本稿で考えた木のクラスは $n=k^H-k'(0 \leq k' \leq k-2)$ を満たす k' が存在する場合という大変狭いものである。この制約がない，一般的な n に対する問題の求解が今後の課題であるが，かなり長期的な課題になりそうである。

謝　　辞

慶應義塾大学の神保雅一教授からは有益なコメントをいただいた。ここに厚く御礼申し上げたい。

参 考 文 献

［1］J. Abbate: *Inventing the Internet*, MIT Press, (1999).（大森義行，吉田晴代訳：『インターネットをつくる』，北海道大学図書刊行会，(2002).）

［2］A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: *Data Structures and Algorithms*, Addition-Wesley Publishing Company, Inc., (1983).（大野義夫訳：『データ構造とアルゴリズム』，培風館，(1987).）

［3］T. Anazawa: A Generalized Optimum Requirement Spanning Tree Problem with a Monge-like Property, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **43** (2000) 417-428.

［4］R. E. Burkard, B. Klinz and R. Rudolf: Perspectives of Monge Properties in Optimization, *Discrete Applied Mathematics*, **70** (1996) 95-161.

［5］K. Koizumi: *An Optimal Graph Construction of Web Sites for Mobile Phones*, 慶應義塾大学理工学研究科修士論文, (2002).

［6］総務省：『インターネット接続サービスの利用者数等の推移【平成 14 年 11 月末現在】(速報)』, (URL) http://www.soumu.go.jp/s-news/2002/021227_1.html.